Clase 1

Objetivos:

- Sustento formal a problemas de programacion dinamica.
- Aplicaciones en macroeconomia.
- Resolucion numerica de problemas de programacion dinamica

Example 1. *Modelo Neoclasico de Crecimiento (sin incertidumbre)*
Formulacion secuencial:

$$\begin{aligned} &\underset{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \\ s.t. \quad & 0 \leq c_t \leq F(k_t) - k_{t+1} \\ & k_{t+1} \geq 0 \quad \forall t = 0, 1, .. \end{aligned}$$

Formulacion en programacion dinamica (ecuacion de Bellman):

$$V(k) = \underset{0 \leq k' \leq F(k)}{Max} U(F(k) - k') + \beta V(k')$$

Ventajas de uso de programacion dinamica:

- Simplifica formulacion y resolucion de problemas.
- Conocer la funcion V es necesario para algunas aplicaciones (e.g. evaluacion de politicas).

Resolucion de ecuacion de Bellman

- Resolucion de problema de punto fijo en la familia de funciones V(k).
- Metodo iterativo. Analogia grafica con la resolucion de un problema de punto fijo en R.

1 Conceptos y teoremas basicos: capitulo 3 de SLP

Definition. *El conjunto X es un espacio vectorial real si para $x, y \in X$ and $\alpha \in \mathbf{R}$, $x+y \in X$ and $\alpha x \in X$. Ademas, se cumplen las siguients propiedades para todos $x, y, z \in X$ and $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:*

a. $x + y = y + x$;

b. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

c. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

d. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

e. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$; *Ademas, hay un vector nulo $\theta \in X$, para el cual*

f. $\theta + x = x$;

g. $0x = \theta$;

h. $1x = x$.

Definition. *Un espacio metrico es un conjunto S, conjuntamente con una metrica (distancia) $\rho : S \times S \to \mathbf{R}$, tal que para todo $x, y, z \in S$*

a. $\rho(x, y) \geq 0$;

b. $\rho(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$;

c. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

d. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Example. *Metrica euclideana en $\mathbf{R^n}$:*

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Definition. *Un espacio vectorial normado es un espacio vectorial S, conjuntamente con una norma $\|\cdot\| : S \to \mathbf{R}$, tal que para todo $x, y \in S$ y para $\alpha \in \mathbf{R}$:*

a. $\|x\| \geq 0$*;*

b. $\|x\| = 0$ *si y solo si* $x = \theta$*;*

c. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$*;*

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(desigualdad triangular).*

Es tradicional interpretar un espacio normado $(S, \|\cdot\|)$ como un espacio metrico, con la metrica $\rho(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in S$.

Definition. *Una secuencia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en S converge a $x \in S$, si para cualquier $\epsilon > 0$, existe N_ϵ tal que*

$$\rho(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon$$

.

Notacion para una secuencia que converge a x: $x_n \to x$.

Example. *Secuencia $x_n = 1 - 1/n$ converge a $x = 1$ con $\rho(x, y) = |x - y|$. No converge con $\rho(x, y) = 1$ para $x \neq y$ y $\rho(x, y) = 0$ para $x = y$.*

Definition. *Un conjunto X es cerrado si toda secuencia convergente $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X converge a un punto en X.*

Definition. *Un conjunto $X \subset \mathbf{R}^l$ es compacto si es cerrado y acotado.*

Alternativamente, un conjunto $X \subset \mathbf{R}^l$ es compacto si y solo si toda secuencia en X admite una subsecuencia convergente en X (teorema de Bolzano-Weierstrass).

Definition. *Una secuencia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en S es una secuencia de Cauchy si para cualquier $\epsilon > 0$, existe N_ϵ para el cual*

$$\rho(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall m, n \geq N_\epsilon.$$

Proposition 1. *Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una secuencia convergente, entonces es una secuencia de Cauchy.*

Proof. Para todo $\epsilon > 0$, definir $\hat{\epsilon} = \epsilon/2$. Dado que existe x; $x_n \to x$, existe $N_{\hat{\epsilon}}$ para el cual

$$\rho(x_n, x) < \hat{\epsilon} \quad \forall n \geq N_{\hat{\epsilon}}$$

Por la desigualdad triangular

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < 2\hat{\epsilon} = \epsilon \quad \forall n, m \geq N_{\hat{\epsilon}}$$

□

Note: una secuencia de Cauchy en S puede no converger a un punto en S. Por ejemplo, $S = (0, 1]$, $x_n = 1/n$, y $\rho(x, y) = |x - y|$.

Ventaja de secuencias de Cauchy: solo es necesario comparar elementos de la secuencia. No es necesario probar la existencia de un punto de convergencia.

Definition. *Un espacio metrico (S, ρ) es completo si toda secuencia de Cauchy en S converge a un punto en S.*

Proposition 2. *Si S es un espacio metrico completo, cualquier subconjunto cerrado de S es tambien un espacio metrico completo.*

Theorem 3.1. *Sea $X \subseteq \mathbf{R}^l$ y $C(X)$ el conjunto de funciones continuas y acotadas $f : X \to \mathbf{R}$ con la sup norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Entonces $C(X)$ es un espacio normado vectorial completo. Si X es compacto, entonces no es necesario restringirse a funciones f acotadas.*

Este teorema es de utilidad porque nos va a permitir probar que toda secuencia de Cauchy de funciones continuas y acotadas converge a un a funcion continua y acotada.

Contraction mappings

Definition. *Sea (S, ρ) un espacio metrico y $T : S \to S$ un operador que mapea cada elemento en S a un elemento en S. T es un contraction mapping (con modulo β) si para algun $\beta \in (0, 1)$, $\rho(Tx, Ty) \leq \beta\rho(x, y)$ para todo $x, y \in S$.*

Figura 3.1 de SLP. Unico punto fijo.

Theorem 3.2. ***Contraction Mapping Theorem.*** *Si (S, ρ) es un espacio metrico completo y $T : S \to S$ es una contraccion con modulo β, entonces*

a. T tiene exactamente un punto fijo v en S , y

b. para todo $v_0 \in S$, $\rho(T^n v_0, v) \leq \beta^n \rho(v_0, v)$, para n = 0, 1, 2, ...

Proof. Para probar a. alcanza con probar que para cualquier $v_0 \in S$, la secuencia $v_1 = Tv_0$ y $v_{n+1} = Tv_n \quad \forall n = 1, 2, ...$ i) toma valores en S para todo n, ii) es una secuencia de Cauchy, iii) el elemento de convergencia v cumple con $Tv = v$, y iv) v es unico. i) se cumple porque $T : S \to S$.

Notar que $\rho(v_n, v_{n-1}) \leq \beta\rho(v_{n-1}, v_{n-2}) \leq \beta^{n-1}\rho(v_1, v_0)$ porque T es un contraccion mapping.

Sea $\epsilon > 0$ y v_n, v_m 2 elementos de dicha secuencia con $n < m$

$$
\begin{aligned}
\rho(v_n, v_m) &\leq \rho(v_m, v_{m-1}) + \rho(v_{m-1}, v_{m-2}) + ... + \rho(v_{n+1}, v_n) \text{ (por la desigualdad triangular)} \\
&\leq \beta^{m-1}\rho(v_1, v_0) + \beta^{m-2}\rho(v_1, v_0) + ... + \beta^n\rho(v_1, v_0) \text{ (T es un contraction mapping)} \\
&= \beta^n \left(1 + \beta + ... + \beta^{m-n-1}\right)\rho(v_1, v_0) = \frac{\beta^n(1-\beta^m)}{1-\beta}\rho(v_1, v_0) \\
&\leq \frac{\beta^n}{1-\beta}\rho(v_1, v_0).
\end{aligned}
$$

Alcanza con elegir N_ϵ tal que $\frac{\beta^{N_\epsilon}}{1-\beta}\rho(v_1, v_0) < \epsilon$, lo que prueba ii). Dado que S es un espacio completo v_n converge a un elemento $v \in S$.

Para probar iii) notar que

$$
\begin{aligned}
\rho(Tv, v) &\leq \rho(Tv, v_n) + \rho(v_n, v) \\
&\leq \beta\rho(v, v_{n-1}) + \rho(v_n, v) < \epsilon
\end{aligned}
$$

para cualquier $\epsilon > 0$. Entonces $\rho(Tv, v) = 0$, que por propiedad b. de la metrica ρ implica $Tv = v$.

Para probar iv), asumir que existen $\hat{v}, v$, tales que $T\hat{v} = \hat{v}$ y $Tv = v$. Eso implica que

$$0 \leq \rho(\hat{v}, v) = \rho(T\hat{v}, Tv) \leq \beta\rho(\hat{v}, v),$$

lo que, dado $\beta \in (0, 1)$, solo puede cumplirse si $\rho(\hat{v}, v) = 0 \Rightarrow \hat{v} = v$.

Para probar b.)

$$\rho(T^n v_0, v) = \rho(T^n v_0, Tv) \leq \beta\rho(T^{n-1}v_0, v) \leq ... \leq \beta^n\rho(v_0, v).$$

□

Corollary 1. *Sea (S, ρ) un espacio metrico completo, y sea $T : S \to S$ un contraction mapping con punto fijo $v \in S$. Si S' es un subconjunto cerrado de S y $TS' \subseteq S'$, entonces $v \in S'$. Si ademas se cumple que $TS' \subseteq S'' \subseteq S'$, entonces $v \in S''$.*

Proof. Por proposition 2, S' es un espacio metrico completo. Eso implica que cualquier secuencia $v_n = T^n v_0$ con $v_0 \in S'$ es una secuencia de Cauchy en S' que converge a $v \in S'$. Si $TS' \subseteq S''$, entonces $v = Tv \in S''$. □

Theorem 3.3. ***Blackwell sufficient conditions for a contraction.*** *Sea* $X \subseteq \mathbf{R}^l$, *y sea* $B(X)$ *el espacio de funciones acotadas* $f : X \to \mathbf{R}$ *con la norma sup norm. Sea* $T : B(X) \to B(X)$ *un operador que satisface*

a. *(monotonicidad)* $f, g \in B(X)$ *y* $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$*, implica que* $(Tf)(x) \leq (Tg)(x) \quad \forall x \in X$*;*

b. *(descuento) existe* $\beta \in (0, 1)$ *tal que*

$$[T(f + a)](x) \leq (Tf)(x) + \beta a \quad \forall f \in B(X), a \geq 0, \text{ y } x \in X.$$

Entonces, T *es un contraction mapping con modulo* β*.*

Proof. Sean f_0, $f_1 \in B(X)$. Es facil comprobar que $f_1(x) \leq f_0(x) + \|f_1 - f_0\| \quad \forall x$.

$$Tf_1 \leq T(f_0 + \|f_1 - f_0\|) \leq Tf_0 + \beta\|f_1 - f_0\|.$$

Eso implica $Tf_1 - Tf_0 \leq \beta\|f_1 - f_0\| \quad \forall x \in X$. Similarmente, $Tf_0 - Tf_1 \leq \beta\|f_1 - f_0\|$ y por tanto $\|Tf_1 - Tf_0\| \leq \beta\|f_1 - f_0\|$. □

Utilidad: las condiciones de Blackwell son usualmente mas sencillas de verificar que las propiedades de un contraction mapping.

Teorema del maximo

Recordar que una funcion $f : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ se define como continua en x_0 si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo x que satisface $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

No aplica para correspondencias porque para un mismo valor de x una corresponencia puede tomar distintos valores.

Definition. *Una correspondencia* $\Gamma : X \to Y$ *se dice lower hemi-continuous (l.h.c) en x si* $\Gamma(x)$ *es no vacia y para todo* $y \in Y$ *y toda secuencia* $x_n \to x$*,* ***existe*** $N \geq 1$ *y una secuencia* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *con* $y_n \to y$ *and* $y_n \in \Gamma(x_n)$ *para todo* $n \geq N$*. (Si* Γ *es no vacia se puede elegir N = 1)*

Definition. *Una correspondencia* $\Gamma : X \to Y$ *que toma valores en conjuntos compactos se dice upper hemi-continuous (u.h.c.) en x si* $\Gamma(x)$ *es no vacia y si para toda secuencia* $x_n \to x$*, y para toda secuencia* y_n*, con* $y_n \in \Gamma(x_n) \quad \forall n \leq 0$*, la secuencia* y_n *admite una subsecuencia convergente a* $y \in \Gamma(x)$*.*

Figura 3.2 No u.h.c. en x_1 y no l.h.c. en x_2

Comparacion con continuidad de funciones.

En forma simplificada, una correspondencia es l.h.c. en x_0 si para cualquier elemento $y \in \Gamma(x_0)$, la correspondencia toma valores cercanos a y para valores de x cercanos a x_0.

Similarmente, una correspondencia es u.h.c. en x_0 si no hay puntos $y \in \Gamma(x)$ con x cercanos a x_0, para los cuales $y \notin \Gamma(x_0)$

Definition. *Una correspondencia $\Gamma : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si es simultaneamente u.h.c. y l.h.c. en x.*

El grafico de una correspondencia se define como el conjunto $A = \{(x, y) \in X \times Y ; y \in \Gamma(x)\}$.

Sea $X \subseteq \mathbf{R}^l$, $Y \subseteq \mathbf{R}^m$, $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ con f continua y sea $\Gamma : X \to Y$ una correspondencia que toma valores en conjuntos compactos. En ese caso la funcion

$$h(x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{Max} f(x, y)$$

esta bien definida y por tanto el conjunto

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = h(x)\}$$

es no vacio.

Theorem 3.6. ***Teorema del maximo.*** *Sea $X \subseteq \mathbf{R}^l$, $Y \subseteq \mathbf{R}^m$, $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ una funcion continua, y sea $\Gamma : X \to Y$ una correspondencia continua y que toma valores en conjuntos compactos. Entonces la funcion $h(x) : X \to \mathbf{R}$ es continua y la correspondencia $G : X \to Y$ es no vacia, toma valores en conjuntos compactos y es u.h.c.*

Proof. Sea $x \in X$.

i) G es no vacia

Para cualquier $x \in X$, $\Gamma(x)$ define un conjunto no vacio y compacto en Y. Dado que f es continua, existe el maximo de f en $\Gamma(x)$ (teorema de Weierstrass).

ii) G(x) es compacto.

G(x) $\subseteq \Gamma(x)$ con $\Gamma(x)$ compacto, $\Rightarrow$ G(x) esta acotado. Resta probar que es cerrado. Sea $y_n \to y$ con $y_n \in G(x)$ para todo n. Eso implica que $f(x, y_n) = h(x)$ para todo n. Por la continuidad de f, $f(x, y) = h(x)$ y por tanto $y \in \Gamma(x)$. Dado que $G(x)$ es cerrado y acotado, es compacto.

iii) G(x) es u.h.c.

Sea $x_n \to x$ y y_n cualquier secuencia con $y_n \in G(x_n)$ para todo n. En particular, lo anterior implica que $y_n \in \Gamma(x_n)$ para todo n. Dado que Γ es u.h.c. existe una subsecuencia convergente y_{n_k}, con $y_{n_k} \to y \in \Gamma(x)$. Dado que Γ es l.h.c., para la correspondiente secuencia x_{n_k} y para $z \in \Gamma(x)$, existe una secuencia $z_{n_k} \to z$. Dado que $y_{n_k} \in G(x_{n_k})$, $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq$

$f(x_{n_k}, z_{n_k})$ para todo n_k, lo que por la continuidad de f implica que $f(x,y) \geq f(x,z)$. Dado que z era arbitrario, $y \in G(x)$ y G es u.h.c. en x.

iv) h(x) es continuous.

Sea x_n cualquier secuencia convergente a x. Sea y_n una secuencia con $y_n \in G(x_n)$ para todo n. Sea $\bar{h} = \text{limsup } h(x_n)$ y $\underline{\text{h}} = \text{liminf } h(x_n)$. Por tanto, existe una subsecuencia x_{n_k} tal que $h(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \bar{h}$. Dado que G es u.h.c. existe una subsecuencia de y_{n_k} con $y'_j \in G(x_j)$ y $y'_j \to y \in G(x)$. Por tanto $\bar{h} = \lim f(x_j, y'_j) = f(x,y) = h(x)$. Por un argumento similar $\underline{\text{h}} = h(x)$, por lo que $h(x_n) \to h(x)$. $\square$

Notar que si f es estrictamente concava y Γ es una correspondencia convexa, la correspondencia $G(x)$ es una funcion continua, que la denotaremos como $g(x)$ (una correspondencia $\Gamma : X \to Y$ que toma un solo valor en Y para cada $x \in X$ y es u.h.c. $\Rightarrow$ es una funcion continua, ver ejercicio 3.11 de SLP). (La estricta concavidad de f en y en implica que $f(x, \alpha y_0 + (1-\alpha)y_1) \geq \alpha f(x,y_0) + (1-\alpha)f(x,y_1) \quad \forall x \in X, \quad \alpha \in (0,1)$ con estricta desigualdad si $y_0 \neq y_1$. Una correspondencia es convexa si $y_0 \in \Gamma(x_0)$ and $y_1 \in \Gamma(x_1)$ implica $\alpha y_0 + (1-\alpha)y_1 \in \Gamma(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_1)$.

Example. *Sea* $X = \mathbf{R}$, $\Gamma(x) = Y = [-1, 1]$, *para todo* $x \in X$, $f(x,y) = xy^2$. *Ilustrar que* $G(x)$ *es u.h.c. pero no l.h.c. en* $x = 0$.

Clase 2

Nota: sea $f : X \to \mathbf{R}$ una funcion que asigna un numero real a cada elemento $x \in X$. Definimos el supremo de f en X como

$$\underset{x \in X}{sup}\, f = Min\,\{a \in \mathbf{R} : f(x) \leq a \quad \forall x \in X\}$$

Si f no esta acotada en X decimos que el supremo $= \infty$.

Definimos el maximo de f en X como

$$\underset{x \in X}{max}\, f = Max\,\{a \in f(X) : f(x) \leq a \quad \forall x \in X\}$$

El supremo de una funcion en un conjunto no es igual al maximo de la funcion en ese conjunto.

Example. *Sea $X = [0, 1)$ y $f(x) = x$. El supremo de f en X es 1. El maximo de f en X no existe. Para cualquier $x \in X$, podemos encontrar $x' \in (x, 1)$ con $f(x') > f(x)$.*

Ventaja: el supremo siempre existe.

Para $X \subseteq \mathbf{R}^m$, $\Gamma : X \to X$, $F : X \times X \to \mathbf{R}$, el problema secuencial (PS) se puede escribir generalmente como

$$\underset{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{sup} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \tag{PS}$$

$$\text{sujeto a (s.a.)} \qquad \begin{aligned} & x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \quad t = 0, 1, 2, ..., \\ & x_0 \in X \text{ dado.} \end{aligned}$$

La funcion $F(x_t, x_{t+1})$ la denotaremos como funcion de retorno. Indica el retorno en terminos de utilidad de las acciones que toma el agente en el periodo, dado x_t.

La formulacion recursiva (ecuacion de Bellman) del problema anterior implica la siguiente ecuacion funcional (EF)

$$v(x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{sup} \{F(x, y) + \beta v(y)\} \quad \forall x \in X \tag{EF}$$

Relacion entre problema secuencial y problema recursivo

Antes de probar la equivalencia entre los dos problemas es necesario verificar que el problema secuencial este bien definido, es decir, que existan secuencias $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ con $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ y que la funcion objetivo este bien definida en el conjunto de secuencias posibles

Notacion:
Vamos a definir a cualquier secuencia $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ como un plan y para cualquier $x_0 \in X$ vamos a definir el conjunto

$$\Pi(x_0) = \{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} : x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ t = 0, 1, ...\}$$

como el conjunto de posibles planes partiendo de x_0.
Sea $\underset{\sim}{x} = (x_0, x_1, ...)$ un elemento tipico en $\Pi(x_0)$. Los 2 siguientes supuestos garantizan

que el conjunto $\Pi(x_0)$ es no vacio para todo $x_0 \in X$.

Supuesto 4.1 $\Gamma(x)$ *es no vacio para todo* $x \in X$.

Supuesto 4.2 *Para todo* $x_0 \in X$ y $\underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)$, *el* $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ *existe y es finito (en SLP se permite que sea* $-\infty$ *o* $+\infty$*).*

Por ejemplo, $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ no existe si la secuencia $\sum\limits_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ oscila con n.

Notacion: Para cada $n = 0, 1, ...$, vamos a definir $u_n : \Pi(x_0) \to \mathbf{R}$ como

$$u_n(\underset{\sim}{x}) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

Por el supuesto 4.2 podemos definir $u : \Pi(x_0) \to \mathbf{R}$ como

$$u(\underset{\sim}{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\underset{\sim}{x}).$$

Bajo los supuestos 4.1 y 4.2 el conjunto $\Pi(x_0)$ es no vacio y la funcion objetivo $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ esta bien definida para todo $x_0 \in X$. Por tanto podemos definir la funcion $v^* : X \to \mathbf{R}$, donde

$$v^*(x_0) = \sup_{\underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)} u(\underset{\sim}{x}) \quad \forall x_0 \in X.$$

Por construccion, la funcion $v^*(x_0)$ es la unica funcion que satisface

$$v^*(x_0) \geq u(\underset{\sim}{x}) \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0), \tag{2}$$

y

$$v^*(x_0) \leq u(\underset{\sim}{x}) + \epsilon \tag{3}$$

para algun $\underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)$ y cualquier $\epsilon > 0$.

Vamos a decir que una funcion $\hat{v}(x)$ satisface la ecuacion de Bellman (EF) si cumple con las siguientes condiciones:

$$\hat{v}(x_0) \geq F(x_0, y) + \beta\hat{v}(y) \quad \forall y \in \Gamma(x_0), \tag{4}$$

y

$$\hat{v}(x_0) \leq F(x_0, y) + \beta\hat{v}(y) + \epsilon \tag{5}$$

para algun $y \in \Gamma(x_0)$ y cualquier $\epsilon > 0$.

El primer objetivo es comprobar si la funcion v^* satisface la solucion de la ecuacion de Bellman (EF) y si, a su vez, la solucion de la ecuacion de Bellman (EF) satisface las propiedades de v^*. Si es asi, entonces $v^* = \hat{v}$. El siguiente resultado va a ser util para ello.

Lemma 4.1. *Sean $X, \Gamma, F,$ y β tales que satisfacen el supuesto 4.2. Entonces, para cualquier $x_0 \in X$ y para cualquier $(x_0, x_1, ...) = \underset{\sim}{x} \in \Gamma(x_0)$,*

$$u(\underset{\sim}{x}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underset{\sim}{x}'),$$

donde $\underset{\sim}{x}' = (x_1, x_2, ...)$.

Proof. Dado que por el supuesto 4.2 el limite $\underset{n\to\infty}{lim} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ existe para cualquier secuencia posible partiendo de x_0, $u(\underset{\sim}{x})$ existe. Por tanto, para cualquier $\underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0)$ podemos escribir

$$u(\underset{\sim}{x}) = \underset{n\to\infty}{lim} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) = F(x_0, x_1) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_{t+1}, x_{t+2}) = F(x_0, x_1) + \beta u(\underset{\sim}{x}'),$$

donde la segunda igualdad tambien hace uso del supuesto 4.2. $\square$

Theorem 4.2. *Sean $X, \Gamma, F,$ y β tales que satisfacen los supuestos 4.1 y 4.2. Entonces la funcion v^* satisface* (EF).

Proof. Si $\beta = 0$, el problema secuencial y la formulacion recursiva (EF) son identicos y trivialmente $v^* = \hat{v}$.

En lo que sigue consideramos el caso $\beta > 0$. Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$.

Debemos probar que una funcion que satisface las ecuaciones (2) y (3), tambien satisface las ecuaciones (4) y (5).

Por ecuacion (2) y lemma 4.1

$$v^*(x_0) \geq F(x_0, x_1) + \beta u(\underset{\sim}{x}') \quad \forall x_1 \in \Gamma(x_0) \text{ y } \underset{\sim}{x}' \in \Pi(x_1) \tag{4.1}$$

Por ecuacion (3), existe una secuencia $\underset{\sim}{x}'^* = (x_1, x_2^*, x_3^*, ...) \in \Pi(x_1)$ tal que $v^*(x_1) \leq u(\underset{\sim}{x}'^*) + \epsilon$

En particular la ecuacion (4.1) se satisface para $\underset{\sim}{x}'^*$. Por tanto,

$$v^*(x_0) \geq F(x_0, x_1) + \beta v^*(x_1) - \beta\epsilon.$$

Dado que ϵ es arbitrario

$$v^*(x_0) \geq F(x_0, x_1) + \beta v^*(x_1)$$

y por tanto v^* satisface ecuacion (4).

Dado que v^* satisface

$$v^*(x_0) \leq F(x_0, x_1) + \beta u(\underset{\sim}{x}') + \epsilon \quad \text{for some } x_1 \in \Gamma(x_0) \text{ y } \underset{\sim}{x}' \in \Pi(x_1),$$

y tambien satisface $u(\underset{\sim}{x}') \leq v^*(x_1)$,

$$v^*(x_0) \leq F(x_0, x_1) + v^*(x_1) + \epsilon \quad \text{for some } x_1 \in \Gamma(x_0)$$

□

Para probar el converso vamos a restringir el problema dinamico.

Theorem 4.3. *Sea X, Γ, F, y β tales que satisfacen los supuestos 4.1 y 4.2. Si v es una solucion de* (EF) *que satisface*

$$\lim_{n \to \infty} \beta^n v(x_n) = 0, \quad \forall (x_0, x_1, , ...) \in \Pi(x_0),\ x_0 \in X \tag{8}$$

Por ejemplo, la condicion (8) *se cumple cuando F esta acotada entonces v es solucion del problema secuencial.*

Proof. En este caso hay que seguir el camino inverso al seguido para probar el teorema 4.2: partir de una funcion que satisface las ecuaciones (4) y (5), y luego probar que tambien satisface las ecuaciones (2) y (3).

Sea $x_0 \in X$. Que v satisfaga (4) implica que

$$\begin{aligned}
v(x_0) &\geq F(x_0, x_1) + \beta v(x_1) \quad \forall x_1 \in \Gamma(x_0) \\
&\geq F(x_0, x_1) + \beta F(x_1, x_2) + \beta^2 v(x_2) \quad \forall x_1 \in \Gamma(x_0) \text{ y } x_2 \in \Gamma(x_1) \\
&\vdots \\
&\geq \sum_{t=1}^{n} F(x_t, x_{t+1}) + \lim_{n\to\infty} \beta^{n+1} v(x_{n+1}) = u_n(\underset{\sim}{x}) + \lim_{n\to\infty} \beta^{n+1} v(x_{n+1}) \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0), \quad n = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

Dado que la anterior desigualdad se cumple para todo n, tambien se cumple en el limite. Por tanto,

$$v(x_0) \geq u(\underset{\sim}{x}) \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \Pi(x_0),$$

y satisface la ecuacion (2).

Para probar que tambien satisface la ecuacion (3), sea $\epsilon > 0$ y $\{\delta_t\}_{t=1}^{\infty}$ una secuencia de valores $\delta_t \geq 0$ que cumple que $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \delta_t < \frac{\epsilon}{2}$.

Dado que v satisface la ecuacion (5), existe una secuencia $(x_0, x_1, ...) \in \Pi(x_0)$

$$v(x_t) \leq F(x_t, x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1}) + \delta_t \quad \forall t = 0, 1, ...$$

Lo anterior implica que

$$\begin{aligned}
v(x_0) &\leq F(x_0, x_1) + \beta v(x_1) + \delta_1 \\
&\leq F(x_0, x_1) + \beta F(x_1, x_2) + \beta^2 v(x_2) + \delta_1 + \beta\delta_2 \\
&\leq \sum_{t=0}^{n} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) + \sum_{t=1}^{n} \beta^{t-1}\delta_t + \beta^{n+1} v(x_{n+1}) \\
&\leq u(\underset{\sim}{x}) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\delta_t + \lim_{t\to\infty} \beta^t v(x_t) \\
&\leq u(\underset{\sim}{x}) + \epsilon
\end{aligned}$$

donde la ultima desigualdad usa que $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\delta_t < \epsilon/2$ y $\beta^t v(x_t)$ converge y por tanto existe $N_{\epsilon/2}$ para el que $\beta^t v(x_t)$ toma valores menores que $\epsilon/2$ para $t \geq N_{\epsilon/2}$. Por tanto, v satisface (5) $\square$

Teoremas 4.4 y 4.5 en SLP prueba que las decisiones optimas en el problema secuencial tambien son optimas en el problema recursivo y que decisiones optimas en el problema recursivo tambien son optimas en el problema secuencial.

Clase 3

Caso de funcion de retorno acotada

Hasta ahora solo hemos probado que, en algunas circunstancias, resolver el problema secuencial es equivalente a resolver el problema recursivo.

Resta probar que procedimiento se puede utilizar para encontrar la solucion del problema recursivo y las propiedades tiene la solucion dependiendo de las primitivas del modelo (funcion de retorno F y correspondencia Γ)

Sea A el grafico de la correspondencia Γ. Para los proximos resultados vamos a asumir

Supuesto 4.3 *X es un subjconjunto convexo de $\mathbf{R}^l$, y la correspondencia $\Gamma : X \to X$ es no-vacia, toma valores en conjuntos compactos, y es continua.*

Supuesto 4.4 *La funcion $F : A \to \mathbf{R}$ es continua y acotada, y $\beta < 1$.*

Los supuestos anteriores implican que tambien se cumplen los supuestos 4.1 y 4.2. Por tanto, las soluciones del problema recursivo son exactamente iguales a las soluciones del problema secuencial. Dado que bajo los supuestos anteriores el maximo coincide con el supremo, podemos trabajar con el siguiente tipo de problemas recursivos

$$v(x) = \underset{y\in\Gamma(x)}{Max} \{F(x, y) + \beta v(y)\} . \tag{PR}$$

El conjunto de acciones optimas para un dado x esta definido por la correspondencia $G : X \to X$, donde

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : v(x) = F(x, y) + \beta v(y)\} .$$

Dado que F es acotada en A, $|F(x, y)| < B < \infty$ para todo $(x, y) \in A$. Eso implica que la funcion $v(x)$ esta acotada superiormente por $B(1 + \beta + \beta^2 + ...) = \frac{B}{1-\beta}$ para todo $x \in X$. Eso nos va a permitir restringir el analisis a funciones acotadas. Ademas, La continuidad de F y Γ nos va a perimitir restringirnos a funciones continuas. Por tanto, sea $C(X)$ el espacio de funciones continuas y acotadas, comenzaremos definiendo el operador T como

$$(Tf)(x) = \underset{y\in\Gamma(x)}{Max} \{F(x, y) + \beta f(y)\} .$$

Theorem 4.6. *Sean X, Γ, F, y β tales que satisfacen los supuestos 4.3 y 4.4, y $f : X \to \mathbf{R}$, con la sup norm. Entonces:*

i) el operador T mapea C(X) en si mismo;

ii) T tiene un unico punto fijo $v \in C(X)$;

iii) para todo $v_0 \in C(X)$

$$\|T^n v_0 - v\| \leq \beta^n \|v_0 - v\|, \quad n = 0, 1, 2, ...; \ y$$

iv) La correspondencia $G : X \to X$ *toma valores en conjuntos compactos y es u.h.c.*

Proof. Dado los supuestos 4.3 y 4.4, para cada $x \in X$ el problema (PR) consiste en maximizar la funcion continua $F(x, \cdot) + \beta v(\cdot)$ en el conjunto compacto $\Gamma(x)$, por lo que existe el maximo del problema.

Dado que el problema (PR) cumple con los supuestos del teorema del maximo, Tf es una funcion continua para todo $f \in C(X)$. Si f esta acotada entonces Tf tambien lo esta (F esta acotada). Por tanto $T : C(X) \to C(X)$.

ii) Primero probamos que el operador T es una contraccion. Sea $f, g \in C(X)$ dos funciones que satisfacen $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$. T satisface

$$(Tf)(x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{Max} \{F(x, y) + \beta f(y)\} \leq \underset{y \in \Gamma(x)}{Max} \{F(x, y) + \beta g(y)\} = (Tg)(x) \quad \forall x \in X,$$

y para $a \geq 0$ y $\forall x \in X$

$$[T(f + a)](x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{Max} \{F(x, y) + \beta(f(y) + a)\} = \underset{y \in \Gamma(x)}{Max} \{F(x, y) + \beta f(y)\} + \beta a.$$

Las 2 ecuaciones anteriores implican que T satisface las condiciones suficientes de Blackwell (teorema 3.3) y por tanto T es una contraccion. Dado que el conjunto de funciones continuas y acotadas con la sup norm es un espacio normado completo (Teorema 3.1), se cumplen las hipotesis del Contraction Mapping Theorem (Teorema 3.2) y por tanto, T tiene un unico punto fijo $v \in C(X)$.

iii) Es la segunda implicancia del Contraction Mapping Theorem y se cumple por lo explicado en ii).

iv) Se cumple porque el problema (PR) satisface las hipotesis del teorema del maximo.

□

Los supuestos siguientes definen condiciones bajo las cuales de pueden probar propiedades adicionales de la solucion de (PR).

Supuesto 4.5 *Para cada y,* $F(\cdot, y)$ *es estrictamente creciente en cada uno de sus primeros* l *elementos.* (Desigualdad de vectores.)

Supuesto 4.6 *La correspondencia* $\Gamma(x)$ *es monotona creciente:* $x \leq x' \Rightarrow \Gamma(x) \subseteq \Gamma(x')$.

Theorem 4.7. *Sean X, Γ, F, y β tales que satisfacen los supuestos 4.3-4.6, y sea v la unica solucion del problema* (PR). *Entonces, v es estrictamente creciente.*

Proof. Sean $x, x' \in X$, con $x' \geq x$ y $x'_i > x_i$ para alguna componente i.

$$v(x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{Max} \{F(x,y) + \beta v(y)\} \leq \underset{y \in \Gamma(x')}{Max} \{F(x,y) + \beta v(y)\} < \underset{y \in \Gamma(x')}{Max} \{F(x',y) + \beta v(y)\} = v(x')$$

donde la primera desigualdad usa el supuesto 4.6 y la segunda desigualdad usa el supuesto 4.5. Por tanto T mapea funciones continuas, acotadas, y creciente en funciones continuas, acotadas, y estrictamente crecientes.

A continuacion mostramos que el conjunto de funciones crecientes es cerrado: Sea $\{f_n\}$ una secuencia de funciones crecientes con $f_n \to f$.

$$f_n(x) \leq f_n(x') \quad \text{para } x \leq x' \text{ y } \quad \forall n = 0, 1, ...$$

Si $f(x) < f(x')$ seria posible encontrar n suficientment grande: $f_n(x) < f_n(x')$ lo que nos lleva a una contradiccion.

Sea $C'(X)$ el espacio de funciones continuas, acotadas y crecientes. Dado que $C'(X)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$, y que el espacio de funciones en $C(X)$ con la sup norm es completo, por el Corolario del Contraction Mapping Theorem, el punto fijo $v \in C'(X)$, i.e., es una funcion creciente. Dado que el operador T mapea funciones en $C'(X)$ a funciones continuas, acotadas, estrictamente crecientes (espacio que denotamos por $C''(X)$), por el mismo corolario, el punto fijo $v \in C''(X)$, i.e., es estrictamente creciente. □

A continuacion proveemos condiciones bajo las cuales la value function es concava.

Supuesto 4.7 *F es estrictamente concava:*

$$F[\theta(x,y) + (1-\theta)(x',y')] \geq \theta F(x,y) + (1-\theta)F(x',y'), \quad \forall (x,y),(x',y') \in A \text{ y } \forall \theta \in (0,1),$$

con desigualdad estricta si $x \neq x'$.

Supuesto 4.8 *La correspondencia $\Gamma(x)$ es convexa: $\forall \theta \in [0,1]$ y $x, x' \in X$,*

$$y \in \Gamma(x) \text{ y } y' \in \Gamma(x') \Rightarrow \theta y + (1-\theta)y' \in \Gamma[\theta x + (1-\theta)x']$$

Theorem 4.8. *Sean Sean X, Γ, F, y β tales que satisfacen los supuestos 4.3-4.4 y 4.7-4.8, y sea v la unica solucion del problema* (PR). *Entonces, v es estrictamente concava y G es una funcion continua.*

Proof. Sea $x_0 \neq x_1$, $\theta \in (0,1)$, y $x_\theta = \theta x_0 + (1-\theta)x_1$. Sea f una funcion concava

Para cualquier y_i tal que $(Tf)(y_i) = \underset{y \in \Gamma(x_i)}{Max} \{F(x_i,y) + \beta f(y)\}$ con $i = 0, 1$, se cumple que $y_\theta = \theta y_0 + (1-\theta)y_1 \in \Gamma(x_\theta)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \theta(Tf)(x_0) + (1-\theta)(Tf)(x_1) &= \theta\left[F(x_0, y_0) + \beta f(y_0)\right] + (1-\theta)\left[F(x_1, y_1) + \beta f(y_1)\right] \\ &< F(x_\theta, y_\theta) + \beta f(y_\theta) \\ &\leq \underset{y \in \Gamma(x_\theta)}{Max} \left\{F(x_\theta, y) + \beta f(y)\right\} = (Tf)(x_\theta), \end{aligned}$$

donde la segunda linea usa la estricta concavidad de F y la concavidad de f y la tercera linea usa que $y_\theta \in \Gamma(x_\theta)$.

Por un argumento analogo al del teorema 4.7 se puede comprobar que el conjunto de funciones continuas, acotadas y concavas (llamemosle $C'(X)$) es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Dado que T es una contraccion y el espacio $C(X)$ con la sup norm es un espacio normado completo, por el corolario del Contraction Mapping Theorem, el punto fijo v de T esta en $C'(X)$. Dado que T mapea funciones en $C'(X)$ en funciones continuas, acotadas, y estrictamente concavas (llamemosle $C''(X)$), usando el mismo corolario concluimos que v es estrictamente concava.

Dado que $v(x)$ es estrictamente concava, para cada $x \in X$ solo puede haber un unico y que satisfaga el problema (PR) (por que?). Por tanto, la correspondencia G toma un solo valor para cada x y que es u.h.c., G es una funcion continua.

□

Cuando la correspondencia $G(x)$ toma un solo valor para cada $x \in X$, la llamaremos policy function y la denotaremos como $g(x)$. En dicho caso, podemos escribir

$$g(x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{argmax} \left\{F(x, y) + \beta v(y)\right\}. \tag{4.2}$$

Theorem 4.9. ***Convergencia de la policy function*** *Sean los mismos supuestos que los del teorema 4.8. Sea $C'(X)$ el espacio de funciones acotadas, continuas, y concavas $f : X \to \mathbf{R}$ y sea $v_0 \in C'(X)$. Sea la secuencia de funciones $\{(v_n, g_n)\}$ definida por*

$$v_{n+1} = Tv_n, \quad n = 0, 1, ... \quad y$$
$$g_n(x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{argmax} \left\{F(x, y) + \beta v_n(y)\right\}, \quad n = 0, 1, ...$$

Entonces, $g_n(x)$ converge a $g(x)$ para cada $x \in X$.

Si la value function $v(x)$ fuese diferenciable, podriamos hacer uso de las condiciones de primer order para probar propiedades de la solucion del problema recursivo. Claramente, dichas propiedades van a depender de la estructura del problema que se este analizando.

El siguiente teorema va a ser de utilidad para probar la diferenciabilidad de la value function.

Theorem 4.10. *(Benveniste and Scheinkman) Sea $X \subseteq \mathbf{R}^l$ sea un conjunto convexo, $V : X \to \mathbf{R}$ una funcion concava, $x_0 \in int\ X$, y $D \subset X$ un conjunto que contiene a x_0. Si existe una funcion $W : D \to \mathbf{R}$, con W concava, diferenciable, con $W(x_0) = V(x_0)$ y con $W(x) \leq V(x) \quad \forall x \in D$, entonces V es diferenciable en x_0 y*

$$V_i(x_0) = W_i(x_0), \quad con\ i = 1, 2, ..., l$$

Nota: decimos que $x_0 \in int\ X$ si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo x con $\|x - x_0\| < \epsilon$, $x \in X$.

Supuesto 4.9 *F es continuamente diferenciable en A (es decir, las derivadas de primer orden de F existen y son continuas para todo $(x, y) \in A$).*

Theorem 4.11. *(Diferenciabilidad de la value function) Sean X, Γ, F y β que cumplen los supuestos 4.3-4.4 y 4.7-4.9. Sea la value function v el punto fijo de (PR) con la policy function g definida como en (4.2). Si para $x_0 \in int\ X$, $g(x_0) \in int\ \Gamma(x_0)$, entonces v es continuamente diferenciable en x_0 y las derivadas de primer orden de v evaluadas en x_0 estan dadas por.*

$$v_i(x_0) = F_i(x_0, g(x_0)), \quad con\ i = 1, 2, ..., l.$$

Proof. Dado que se cumplen los supuestos del teorema de Benveniste y Scheinkman, alcanza con encontrar una funcion $W(x)$ concava con $W(x) \leq v(x)$ para todo x en un entorno de x_0 y con $W(x_0) = v(x_0)$.

Dado que $x_0 \in int\ X$, $g(x_0) \in int\ \Gamma(x_0)$, y Γ es continua, es posible encontrar un entorno D de x_0, con $D \subset X$ y $g(x_0) \in \Gamma(x)\ \forall x \in D$. Sea $W : D \to \mathbf{R}$ tal que

$$W(x) = F(x, g(x_0)) + \beta v(g(x_0)).$$

$W(x)$ es concava por la concavidad de F,
$W(x) \leq v(x) = \underset{y \in \Gamma(x)}{Max} \{F(x, y) + \beta v(y)\} \quad \forall x \in D$ dado que $g(x_0) \in \Gamma(x)\ \forall x \in D$,
$W(x_0) = F(x, g(x_0)) + \beta v(g(x_0)) = v(x_0)$ por la definicion de $g(x_0)$. □

Otro explicacion basada en el teorema de la envolvente

Para $x_0 \in intX$, $g(x_0) \in int\Gamma(x_0)$ con F y v, y g continuamente diferenciables. Para simplificar notacion, asumir que $X \subseteq \mathbf{R}$. Las derivada de la value function v' satisface

$$v'(x_0) = F_x(x_0, g(x_0)) + \underbrace{[F_y(x_0, g(x_0)) + \beta v'(g(x_0))]}_{=0 \text{ in the optimum}} g'(x_0) \tag{4.3}$$

El primer termino de (4.3) refleja el efecto directo de un cambio en la variable de estado x. Por ejemplo, un mayor nivel de capital inicial aumenta la utilidad en el periodo corriente porque hay mas bienes disponibles para consumir. El segundo termino muestra el efecto indirecto. Al cambiar x tambien cambia la decision optima y. Pero con una solucion interior, ese efecto indirecto es nulo porque cambios marginales en y no afectan la utilidad del agente en el optimo (la condicion de primer orden se cumple).

Example. *Considere el problema de crecimiento neoclasico con*

$$U(c) = log(c),$$

$$F(k) = Ak, \quad con\ A > 0.$$

Notar que si bien las funciones U y F son continuamente diferenciables (para $c > 0$), el problema no esta acotado. El problema se podria acotar, por ejemplo, al considerar valores de $k \in \left[\underline{k}, \overline{k}\right]$. Ese tipo de restricciones son habituales cuando se recurre a metodos numericos. En lo que sigue, mostraremos la existencia de una solucion (analitica) del problema recursivo no acotado.

Partiremos de una funcion $v^0(x) = 0$,
Iteracion 1

$$v^1(x) = \underset{0 \leq k' \leq Ak}{Max}\, log(Ak - k')$$

El anterior es el problema que enfrentaria un agente en su ultimo periodo de vida. Dado que el agente no va a derivar utilidad del capital que ahorre para el periodo siguiente, la decision optima es no ahorrar y consumir todo el producto $F(K)$ generado en el periodo. Por tanto,

$$g^0(k) = 0, \ y$$

$$v^1(k) = log(Ak) = log(A) + log(k).$$

Iteracion 2

$$v^2(k) = \underset{0 \leq k' \leq Ak}{Max} \left\{log(Ak - k'^1) + \beta v^1(k')\right\} = \underset{0 \leq k' \leq Ak}{Max} \{log(Ak - k') + \beta[log(A) + log(k')]\}$$

La condicion de primer orden del problema es

$$-\frac{1}{Ak - k'} + \beta\frac{1}{k'} = 0 \Rightarrow g^1(k) = \frac{\beta Ak}{1 + \beta}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
v^2(k) &= log\left(Ak - \frac{\beta Ak}{1+\beta}\right) + \beta\left[log(A) + log\left(\frac{\beta A}{1+\beta}\right) + log(k)\right] \\
&= log\left(\frac{A}{1+\beta}\right) + \beta\left[log(A) + log\left(\frac{\beta A}{1+\beta}\right)\right] + (1+\beta)\, log(k) \\
&= (1+\beta) log\left(\frac{A}{1+\beta}\right) + \beta\left[log(A) + log\left(\beta\right)\right] + (1+\beta)\, log(k)
\end{aligned}$$

Iteracion 3

$$\begin{aligned}
v^3(k) &= \underset{0\le k'\le Ak}{Max}\left\{log(Ak-k') + \beta v^2(k')\right\} \\
&= \underset{0\le k'\le Ak}{Max}\left\{log(Ak-k') + \beta(1+\beta) log\left(\frac{A}{1+\beta}\right) + \beta^2\left[log(A) + log\left(\beta\right)\right] + \beta\left(1+\beta\right) log(k')\right\}
\end{aligned}$$

La condicion de primer orden del problema es

$$-\frac{1}{Ak-k'} + \beta\left(1+\beta\right)\frac{1}{k'} = 0 \Rightarrow g^2(k) = \frac{(\beta+\beta^2)Ak}{1+\beta+\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
v^3(k) &= \left\{\begin{array}{l} log\left(\frac{Ak}{1+\beta+\beta^2}\right) + \beta(1+\beta) log\left(\frac{A}{1+\beta}\right) + \beta^2\left[log(A) + log\left(\beta\right)\right] + \\ \beta\left(1+\beta\right) log\left(\frac{(\beta+\beta^2)Ak}{1+\beta+\beta^2}\right) \end{array}\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{l} (1+\beta+\beta^2) log\left(\frac{A}{1+\beta+\beta^2}\right) + \beta(1+\beta) log\left(\frac{A}{1+\beta}\right) + \beta^2\left[log(A) + log\left(\beta\right)\right] + \\ (1+\beta+\beta^2) log\left(k\right) \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Notar que al final de todas las iteraciones obtenemos la siguiente forma funcional para la value function

$$v^n(k) = B_0^n + B_1^n log(k)$$

Por tanto vamos a probar si una funcion con esa forma funcional satisface la ecuacion de Bellman del problema. Si es asi, entonces habremos encontrado una solucion del problema (en este caso, la unica, ver teorema 4.14 en SLP).

La estrategia consiste en comenzar con $v(k) = B_0 + B_1 log(k)$. Esta funcion es un punto fijo del problema recursivo si y solo si

$$B_0 + B_1 log(k) = \underset{0\le k'\le Ak}{Max}\left\{log(Ak-k') + \beta\left[B_0 + B_1 log(k')\right]\right\} \quad \forall k \ge 0$$

La condicion de primer orden es

$$\frac{1}{Ak-k'}=\frac{\beta B_1}{k'}\Rightarrow k'=\frac{\beta B_1 Ak}{1+\beta B_1} \tag{4.4}$$

Sustituyendo (4.4) *en la ecuacion de Bellman obtenemos*

$$B_0+B_1log(k)=log\left(Ak-\frac{\beta B_1 Ak}{1+\beta B_1}\right)+\beta\left[B_0+B_1log\left(\frac{\beta B_1 Ak}{1+\beta B_1}\right)\right]$$

$$B_0+B_1log(k)=log\left(\frac{A}{1+\beta B_1}\right)+log\left(k\right)+\beta\left[B_0+B_1log\left(\frac{\beta B_1 A}{1+\beta B_1}\right)+B_1log\left(k\right)\right]$$

$$B_0+B_1log(k)=log\left(\frac{A}{1+\beta B_1}\right)+\beta B_0+\beta B_1log\left(\frac{\beta B_1 A}{1+\beta B_1}\right)+(1+\beta B_1)log\left(k\right)$$

Para que la funcion $v(k)$ *que probamos como solucion satisfaga efectivamente la ecuacion de Bellman, los parametros* B_0 *y* B_1 *deben satisfacer*

$$\begin{aligned} B_0 &= log\left(\frac{A}{1+\beta B_1}\right)+\beta B_0+\beta B_1log\left(\frac{\beta B_1 A}{1+\beta B_1}\right) && (4.5)\\ B_1 &= 1+\beta B_1 && (4.6)\end{aligned}$$

La ecuacion (4.6) *implica*

$$B_1=\frac{1}{1-\beta}$$

Sustituyendo B_1 *en la ecuacion* (4.5) *obtenemos*

$$\begin{aligned} B_0 &= log\left(\frac{A}{1+\frac{\beta}{1-\beta}}\right)+\beta B_0+\frac{\beta}{1-\beta}log\left(\frac{\frac{\beta}{1-\beta}A}{1+\frac{\beta}{1-\beta}}\right)\\ &= \left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\right)log(A)+log\left(\frac{1}{1+\frac{\beta}{1-\beta}}\right)+\beta B_0+\frac{\beta}{1-\beta}log\left(\frac{\frac{\beta}{1-\beta}}{1+\frac{\beta}{1-\beta}}\right)\\ &= \frac{1}{1-\beta}log(A)+log\left(\frac{1}{\frac{1}{1-\beta}}\right)+\beta B_0+\frac{\beta}{1-\beta}log\left(\frac{\frac{\beta}{1-\beta}}{\frac{1}{1-\beta}}\right)\\ &= \frac{1}{1-\beta}log(A)+log\left(1-\beta\right)+\beta B_0+\frac{\beta}{1-\beta}log\left(\beta\right) && (4.7)\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de B_1 *en la ecuacion* (4.7), *obtenemos*

$$B_0 = \frac{1}{(1-\beta)^2} log(A) + \frac{1}{1-\beta} log\left(1-\beta\right) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} log\left(\beta\right).$$

Finalmente, luego de sustituir el valor de B_1 *en la ecuacion* (4.4), *obtenemos*

$$g(k) = \frac{\frac{\beta}{1-\beta} Ak}{1 + \frac{\beta}{1-\beta}} = \frac{\frac{\beta}{1-\beta} Ak}{\frac{1}{1-\beta}} = \beta Ak.$$

Notar que esta economia crece a una tasa constante e igual a $\frac{g(k)}{k} = \beta A$.

Clase 5

Considere la siguiente economia con gobierno. El gobierno grava el ingreso a una tasa τ y redistribuye lo recaudado a traves de una transferencia de suma fija T_t. El gobierno no se endeuda ni acumula activos, y por tanto las cuentas del gobierno se equilibran en todos los periodos.

El problema de cada consumidor consiste en

$$\begin{array}{ll} & \underset{\{k_{t+1},l_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t) \\ s.a. & c_t + k_{t+1} = ((r_t - \delta)k_t + w_t l_t)(1-\tau) + k_t + T_t \\ & c_t \geq 0,\ k_{t+1} \geq 0,\ l_t \in [0,1] \quad \forall t = 0, 1, ... \end{array}$$

dada una secuencia de precios $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ y una secuencia de transferencias $\{T_t\}_{t=0}^{\infty}$. En este caso suponemos que los consumidores pueden deducir la depreciacion de su capital del ingreso generado por rentar capital a las firmas.

El problema de las firmas es

$$\underset{k_t,l_t}{Max} \{F(k_t, l_t) - r_t k_t - w_t l_t\} \quad \forall t = 0, 1, ...$$

La definicion de equilibrio es analoga a la definicion usada en la clase anterior con el agregado de la restriccion presupuestal del gobierno

$$\tau(w_t l_t + (r_t - \delta)k_t) = T_t$$

se cumple para todo $t = 0, 1, ...$

Como plantear este problema en formulacion recursiva? Dado que la oferta de trabajo agregada ($\bar{l}$) depende no trivialmente de las variables de estado agregadas y afectan los precios de equilibrio r y w, los consumidores deben pronosticar como $\bar{l}$ depende de $\bar{k}$. Adicionalmente, en esta economia cada consumidor necesita hacer un supuesto sobre como como las transferencias T dependen de $\bar{k}$. Notar que las transferencias T cumplen un rol similar al de los precios.

El problema del consumidor lo formularemos entonces como

$$\begin{array}{ll} & v(k, \bar{k}) = \underset{k',l}{Max} \left\{u(c, l) + \beta v(k', \bar{k}')\right\} \\ s.a. & c + k' = \left[(r(\bar{k}, \bar{l}) - \delta)k + w(\bar{k}, \bar{l})l\right](1-\tau) + k + T(\bar{k}, \bar{l}) \\ & c \geq 0,\ k' \geq 0,\ k_0 \text{ dado},\ l \in [0,1] \\ & \bar{k}' = G^k(\bar{k}),\ \text{y} \\ & \bar{l} = G^l(\bar{k}). \end{array}$$

donde G^k, G^l y $T(\bar{k},\bar{l})$ denotan las percepciones de los consumidores sobre las leyes de acumulacion de capital agregado, de determinacion de oferta agregada de trabajo en el periodo corriente, y de determinacion de las transferencias recibidas en el periodo corriente.

El problema de las firmas consiste en

$$\underset{k,l}{Max}\left\{F(k,l)-r(\bar{k},\bar{l})k-w(\bar{k},\bar{l})l\right\}$$

donde asumimos que F es una funcion creciente en ambos argumentos, concava y con rendimientos constantes a escala.

Un equilibrio recursivo competitivo consiste en un conjunto de policy functions $g^k(k,\bar{k})$, $g^l(k,\bar{k})$, value function $v(k,\bar{k})$, funciones de precios $r(\bar{k},\bar{l})$, $w(\bar{k},\bar{l})$, funcion de transferencia $T(\bar{k},\bar{l})$ y leyes agregadas percibidas por los consumidores $G^k(\bar{k})$ y $G^l(\bar{k})$ para las que

1) La value function $v(k,\bar{k})$ es solucion del problema de los consumidores y

$$\begin{aligned}
&\left\{g^k(k,\bar{k}),g^l(k,\bar{k})\right\}=\underset{k',l}{argmax}\left\{u\left(c,l\right)+\beta v(k',\bar{k}')\right\}\\
s.a.\quad &c+k'=\left[(r(\bar{k},\bar{l})-\delta)k+w(\bar{k},\bar{l})l\right](1-\tau)+k+T(\bar{k},\bar{l})\\
&c\geq 0,\ k'\geq 0,\ l\in[0,1]\\
&\bar{k}'=G^k(\bar{k}),\ \text{y}\\
&\bar{l}=G^l(\bar{k}).
\end{aligned}$$

2) Las firmas maximizan beneficios, lo que equivale a [1]

$$\begin{aligned}
r(\bar{k},\bar{l})&=F_k(\bar{k},\bar{l})\\
w(\bar{k},\bar{l})&=F_l(\bar{k},\bar{l})
\end{aligned}$$

[1]Notar que por tener F rendimientos constantes a escala el problema de las firmas se puede escribir como

$$\underset{k/l,l}{Max}\left\{l\left[F(k/l,1)-r(\bar{k},\bar{l})k/l-w(\bar{k},\bar{l})\right]\right\}$$

La condicion de primer orden con respecto a k/l es

$$F_k(k/l,1)=r(\bar{k},\bar{l}),$$

lo que determina que el ratio k/l se iguale para todas las firmas.

Dado que el problema es lineal en l, en equilibrio debe cumplirse que

$$F(k/l,1)-r(\bar{k},\bar{l})k/l-w(\bar{k},\bar{l})=0,$$

que equivale a $F_l(k/l,1)=w(\bar{k},\bar{l})$.

Dado que todas las firmas eligen el mismo k/l, dicho ratio es igual a $\bar{k}/\bar{l}$. Notar que, en equilibrio, las firmas no tienen por que tener el mismo tamano.

3) El gobierno equilibra sus cuentas

$$T(\bar{k},\bar{l}) = \tau\left[(r(\bar{k},\bar{l}) - \delta)\bar{k} + w(\bar{k},\bar{l})\bar{l}\right]$$

4) Las leyes agregadas percibidas G^k y G^l son consistentes con las decisiones optimas individuales

$$G^k(\bar{k}) = g^k(\bar{k},\bar{k}), \text{ y}$$
$$G^l(\bar{k}) = g^l(\bar{k},\bar{k}).$$

Asumiendo que se cumplen las condiciones para las que la value function es diferenciable en k, y usando las condiciones de equilibrio de r y w, la condiciones de primer orden para k' y l son

$$u_c(c,l) = \beta v_k(k',\bar{k}') \tag{5.1}$$

$$u_c(c,l)F_l(\bar{k},\bar{l})(1-\tau) = -u_l(c,l) \tag{5.2}$$

Usando teorema 4.11

$$v_k(k,\bar{k}) = u_c(c,l)\left[1 + (F_k(\bar{k},\bar{l}) - \delta)(1-\tau)\right] \tag{5.3}$$

Remplazando (5.3) en (5.1), obtenemos la siguiente ecuacion de Euler

$$u_c(c,l) = \beta u_c(c',l')\left[1 + (F_k(G^k(\bar{k}), G^l(G^k(\bar{k})) - \delta)(1-\tau)\right] \tag{5.4}$$

donde

$$\begin{aligned} c' &= \left[\left(F_k\left[G^k(\bar{k}), G^l(G^k(\bar{k}))\right] - \delta\right) g^k(k,\bar{k}) + F_l\left[G^k(\bar{k}), G^l(G^k(\bar{k}))\right] g^l\left[g^k(k,\bar{k}), G^k(\bar{k})\right]\right](1-\tau) \\ &\quad + g^k(k,\bar{k}) + T(G^k(\bar{k}, G^l(G^k(\bar{k})) - g^k\left(g^k(k,\bar{k}), G^k(\bar{k})\right) \end{aligned}$$

y

$$l' = g^l\left(g^k(k,\bar{k}), G^k(\bar{k})\right)$$

Las condiciones de primer orden (5.2) y (5.4) implican que las tasas marginales de transformacion (de horas de trabajo en bienes de consumo, y de capital hoy en bienes de consumo en el periodo siguiente) son distintas a las tasas marginales de sustitucion de los consumidores ($\frac{-u_l(c,l)}{u_c(c,l)}$ y $\frac{u_c(c',l')}{u_c(c,l)}$. Eso implica que la asignacion de recursos no es un optimo de Pareto y no podemos usar el primer y segundo teorema del Bienestar.

Por ejemplo, $F_l > -u_l/u_c \Rightarrow$ la cantidad de bienes de consumo que pueden producir las firmas con una unidad mas de trabajo es mayor a la cantidad de bienes de consumo que exigirian los consumidores por ofrecer esa unidad adicional de trabajo.

Es facil verificar que las condiciones de primer orden del problema—recursivo—del planificador

$$
\begin{aligned}
& v(k) = \underset{k',l}{Max} \{u(c,l) + \beta v(k')\} \\
s.a. \quad & c = F(k,l) + (1-\delta)k \\
& c \geq 0, \; k' \geq 0, \; l \in [0,1].
\end{aligned}
$$

no coinciden con las ecuaciones (5.2) y (5.4).

Computo numerico de soluciones de problemas recursivos

Para ejmplificar, usaremos la version mas simple del modelo neoclasico de crecimiento, i.e.

$$
\begin{aligned}
& V(k) = \underset{0 \leq k' \leq F(k)}{Max} \{u(c) + \beta V(k')\} \\
s.a. \quad & c = F(k) + (1-\delta)k - k',
\end{aligned}
$$

con u y F crecientes, concavas y continuas, y con $\beta < 1$. Eso implica que se cumplen los supuestos $4.3 - 4.8$ y por tanto existe una solucion V del problema recursivo, con V creciente y concava. Empezaremos considerando el metodo mas simple para encontrar la solucion de un problema recursivo, que consiste en discretizar el espacio de valores posibles para la variable de estado.

Sea $\mathcal{K} = (k_0, k_1, ..., k_N)$ la grilla de posibles valores para el stock de capital. Sea $\mathcal{V} = (v_0, v_1, ..., v_N)$ el vector de valores de la value function $V(k)$ en cada elemento de $\mathcal{K}$.

El operador $T : \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^{N+1}$ esta definido por

$$
\begin{aligned}
& Tv = \underset{j \in \Gamma(i)}{Max} \{u(c) + \beta v_j\} \\
s.a. \quad & c = F(k_i) + (1-\delta)k_i - k_j.
\end{aligned}
$$

donde $\Gamma(i) = \{j \in (0, 1, ..., N+1) : k_j \in [0, F(k_i) + (1-\delta)k_i]\}$.

Es decir, el operador T mapea un vector real de $N+1$ componentes en otro vector real de $N+1$ componentes.

Si asumimos que $k_0 = 0$ la correspondencia Γ es no vacia y es inmediato verificar que se cumplen los supuestos 4.1 y 4.2, por lo que la solucion del problema recursivo es igual a la solucion del problema secuencial discretizado. Se puede verificar que si F y u son continuas (alcanza con que tomen valores finitos para todo $k \in [K]$), se puede probar un teorema analogo al teorema 4.6 que prueba la existencia y unicidad del punto fijo del operador T

(notar que el espacio de $\mathbf{R}^{N+1}$ con la metrica $\rho(v,\hat{v}) = \underset{i}{sup}|v_i - \hat{v}_i| \quad \forall v,\hat{v} \in \mathbf{R}^{N+1}$ es completo).

Este metodo tiene la ventaja de la sencillez y ademas es robusto. Por ejemplo, no impone ninguna restriccion al problema mas alla de que la funcion de retorno tome valores finitos. Este metodo es comunmente usado cuando se resuelven problemas que pueden ser no-convexos y donde existan multiples optimos locales. La desventaja es que puede ser que se requiera de N altos para obtener soluciones precisas, lo que puede llegar a enlentecer significativamente el computo de una solucion.

Una tecnica que suele ser de utilidad para acelerar el computo de una solucion es la interpolacion (ver Numerical Methods in Economics de Kenneth Judd). Mantenemos la grilla de capital y la grilla de valores de la value function tal como la definimos en los parrafos anteriores. Pero ahora, el operador $T : \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^{N+1}$ esta definido por

$$\begin{aligned} Tv &= \underset{k' \in \Gamma(i)}{Max} \{u(c) + \beta v_j\} \\ s.a. \qquad c &= F(k_i) + (1-\delta)k_i - k'. \end{aligned}$$

con $\Gamma(i) = \{k' \in [0, F(k_i) + (1-\delta)k_i]\}$.

En este caso, dejamos que la variable de control k' tome cualquier valor real en el conjunto definido por $\Gamma(i)$. Sin embargo, la value fuction V esta definida solo en un conjunto discreto de puntos. Para asignar valores a la value function en puntos que no estan en $\mathcal{K}$ usaremos interpolacion. El procedimiento de interpolacion mas simple es el de interpolacion lineal.

Si el vector $\mathcal{K}$ esta ordenado, entonces define un conjunto de N intervalos $[k_0, k_1]$, $[k_1, k_2]$, ..., $[k_N, k_{N+1}]$. Para $k \in [k_{i-1}, k_i]$, definimos la funcion $\hat{v} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ como

$$\hat{v}(k) = v_{i-1} + (k - k_{i-1}) \times \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{k_i - k_{i-1}} \right).$$

Notar que el procedimiento de interpolacion lineal no hace uso de la concavidad de V dentro de cada intervalo. Eso puede sesgar la solucion optima. Un procedimiento de interpolacion comunmente utilizado que permite corregir limitaciones de la interpolacion lineal es el uso de splines cubicas. Esto es, asumimos que $\hat{v}(k)$ es una funcion cubica en k, donde los coeficientes dependen del intervalo donde se ubica k. Mas concretamente,

$$\hat{v}(k) = a_i + b_i k + c_i k^2 + d_i k^3 \quad \text{para } k \in [k_{i-1}, k_i].$$

La funcion $\hat{v}(k)$ depende de $N \times 4$ parametros. Un primer conjunto de restricciones impone que $\hat{v}(k)$ coincida con v_i para $k = k_i$ y que $\hat{v}(k)$ sea una funcion continua. Eso implica

$$v_i = a_i + b_i k_{i-1} + c_i k_{i-1}^2 + d_i k_{i-1}^3 \quad \text{para } i = 1, 2, ...N. \tag{5.5}$$

$$v_i = a_i + b_i k_i + c_i k_i^2 + d_i k_i^3 \quad \text{para } i = 1, 2, ...N. \tag{5.6}$$

Al imponer que las derivadas de primer y segundo orden de $\hat{v}(k)$ sean continuas se obtienen las siguientes restricciones

$$b_i + 2c_i k_i + 3d_i k_i^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1} k_i + 3d_{i+1} k_i^2 \quad \text{para } i = 1, 2, ...N-1. \tag{5.7}$$

y

$$2c_i + 6d_i k_i = 2c_{i+1} + 6d_{i+1} k_i \quad \text{para } i = 1, 2, ...N-1. \tag{5.8}$$

Las restricciones $(5.5) - (5.8)$ implican $4N - 2$ ecuaciones. Por tanto se precisan 2 restricciones adicionales para determinar completamente los parametros $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i=1}^N$.

Un procedimiento habitual consiste en imponer las siguientes restricciones a la derivada de $\hat{v}$ en los extremos:

$$\hat{v}'(k_0) = b_1 + 2c_1 k_0 + 3d_1 k_0^2 = \frac{v_1 - v_0}{k_1 - k_0}$$

y

$$\hat{v}'(k_N) = b_N + 2c_N k_N + 3d_N k_N^2 = \frac{v_N - v_{N-1}}{k_N - k_{N-1}}$$

Las splines cubicas tienen la venaja de que son maleables y pueden aproximar con relativa precision funciones “bien comportadas” (continuas y con derivadas continuas). Tambien economiza tiempo computacional: solo requiere la evaluacion de un polinomio de 3er orden.

El uso de procesimientos de interpolacion permiten obtener “buenas” aproximaciones la value function v y de la policy function $g(k)$ con menos puntos de grilla que el requerido por el metodo discreto. Claro que no se aplica a todos los problemas.

Una limitacion de los procedimientos de interpolacion es que las aproximaciones pueden llegar a ser muy malas fuera del rango $[k_0, k_N]$.

Clase 6

Fuente: SLP y notas de Per Krusell

Los modelos dinamicos son tipicamente usados en macroeconomia usando el siguiente protocolo

1) Documentar patrones de comportamiento de variales de interes. Por ejemplo: i) varianza y covarianzas de tasas de crecimiento de PBI, consumo, inversion; ii) media y varianza de tasas de retornos de las acciones; iii) media y volatilidad de flujos de comercio entre paises, etc.

2) Presentar un modelo dinamico. Mostrar que el modelo esta bien definido, i.e., existe el equilibrio y es unico (a veces nos puede interesar que exista mas un equilibrio). Caracterizar el equilibrio usando la formlacion mas general posible.

3) Usar funciones especificas y calibrar el modelo. Eso es, asignar valores de parametros usando estimaciones realizadas en otros estudios, o (de no ser posible lo primero) de modo que el modelo sea consistente con algunas estadisticas que nos interesan. Usualmente hay restricciones a los valores que se le puede asignar a los parametros.

Una vez que el modelo esta calibrado, podemos simularlo, i.e., generar muestras artificiales que luego pueden ser cotejadas con los datos. Este paso nos permite evaular que tan exitoso es el el modelo en explicar la evidencia que queremos entender. Tambien lo podemos utilizar par hacer predicciones.

4) Si el modelo incorpora ineficiencias, podemos evaluar distintas politicas que podrian (o no) ayudar a corregir esas ineficiencias. Tambien podriamos rankear las politicas de acuerdo a cuanto aumentan el bienestar de los consumidores ($E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\right]$).

Claramente, ningun modelo tiene 100% de poder explicativo. En parte, porque existen eventos que posiblemente no puedan ser explicados por ningun modelo. Un ejemplo es la influencia del clima. Otro ejemplo, es el caso de un individuo que puede encontrar un trabajo mejor o perder tu trabajo.

En otras ocasiones, los "shocks" son exogenos al modelo porque el modelo no estudia la fuente de esos shocks. Un ejemplo es el estudio de la dinamica de una economia pequena, donde el precio internacional de los commodities es habitualmente incorporado como un shock exogeno.

Lo anterior implica que

1) El modelo debe incorporar como los agentes toman sus decisiones cuando existe incertidumbre

2) Cuando evaluamos la capacidad explicativa del modelo, debemos incorporar la presencia de shocks.

Estado estacionario

En el caso sin incertidumbre, un estado estacionario define un estado en que todas las variables toman el mismo valor periodo a periodo.

En el caso con incertidumbre las variables tipicamente no pueden tomar el mismo valor periodo a perido. En ese caso, nos va a interesar que en el largo plazo la distribucion de probabilidad de las variables no cambie en el tiempo. De ese modo podemos estudiar la dinamica de una economia sin preocuparnos por las condiciones iniciales de la cual partio la economia.

La existencia de un estado estacionario (deterministico) tambien es de utilidad por motivos computacionales. Algunos metodos se enfocan en resolver el problema recursivo en un entorno del estado estacionario.

A continuacion consideraremos el modelo de crecimiento neoclasico con funcion de produccion y de utilidad $F(k)$ y $u(c)$ estrictamente crecientes, estrictamente concavas y con derivadas de primer y segundo orden continuas continuas. Sea $f(k) = F(k) + (1-\delta)k$.

$f(0) = 0$,

$\underset{k \to 0}{f'(k)} = \infty$,

$\underset{k \to \infty}{f'(k)} = b < 1$ y

$\underset{c \to 0}{u'(k)} = \infty$

Usando la condicion de primer orden del problema obtenemos que se debe cumplir la ecuacion de Euler

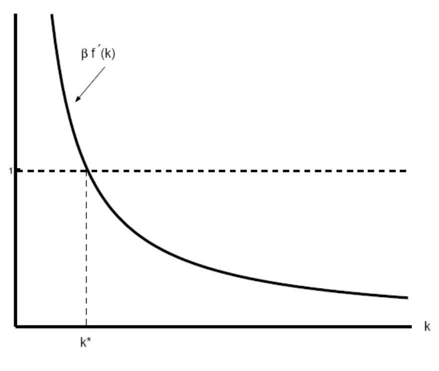
$$u'(c_t) = \beta f'(k_{t+1}) u'(c_{t+1}) \quad \forall t$$

donde $c_t = f(k_t) - k_{t+1}$.

En un estado estacionario $c_t = c_{t+1} = c^*$ y $k_t = k_{t+1} = k^*$ y por tanto se debe cumplir que:

$$u'(c^*) = \beta f'(k^*) u'(c^*) \Rightarrow \beta f'(k^*) = 1$$

Bajo los supuestos anteriores existe un estado estacionario y es unico



Resta verificar si el estado estacionario es estable, necesitamos conocer las propiedades de la policy function $g(k)$.

Se cumple que
i) $g(k)$ es una funcion continua (teorema 4.8).

ii) $g(0) = 0$ dado que $c(k) = f(k) - g(k) \geq 0$ y $f(0) = 0$.

iii) Existe $\bar{k}$ con $g(k) < k \quad \forall k > \bar{k}$. Ademas $\bar{k} > (f')^{-}1(1/\beta)$.

$$\underset{c \to 0}{u}{}'(c) = \infty \Rightarrow c(k) > 0 \quad \forall k > 0 \Rightarrow g(k) < f(k) \quad \forall k > 0 \tag{6.9}$$

f estrictamente concava implica

$$f(k) < f(\hat{k}) + f'(\hat{k})(k - \hat{k}) \quad \forall k > \hat{k} > 0 \underset{f'(\infty)<1}{\Rightarrow} \exists \bar{k} : f(k) < k \quad \forall k > \bar{k}. \tag{6.10}$$

Las ecuaciones (6.9) y (6.10) implican que existe $\bar{k}$ tal que $g(k) < k$ para $k > \bar{k}$.

$\underset{k \to 0}{f'(k)} = \infty \Rightarrow f(k) - k > 0$ para k cercano a 0
Por tanto, $Max\,\{f(k) - k\} > 0$ y se alcanza para $f'(k) = 1$ (notar que $f(k) - k$ es estrictamente concava).
Dado que

$$f(\bar{k}) - \bar{k} < 0 \text{ y } f' \text{ decreciente} \Rightarrow \bar{k} > (f')^{-1}(1) > (f')^{-1}(1/\beta)$$

iv) g es estrictamente creciente (HW 2) v) $c(k)$ es estrictamente creciente (HW 2). vi)

$g(k^*) = k^*$, para k^* tal que $f'(k^*) = 1$.
La formulacion funcional de la ecuacion de Euler es

$$u'\left[f(k) - g(k)\right] = \beta f'(g(k))u'\left[f(g(k)) - g(g(k))\right]$$

Claramente, cualquier policy function con $g(k^*) = k^*$ satisface la ecuacion anterior. Resta probar que no existe otro valor para $g(k^*)$ que tambien la satisface.
Sea $g^* = g(k^*)$. Notar que el termino izquierdo es monotono creciente en g^* por la concavidad de u. El termino de la derecha es monotono decreciente en g^* por la concavidad de f y u y por propiedad v) de $g(k)$. Por tanto, no puede haber otro valor de $g(k^*) \neq k^*$ que satisfaga la ecuacion funcional.

vii) Si g es diferenciable, $g'(k^*) < 1$
Tomando la derivada de la ecuacion de Euler con respecto a k y evaluandola en k^* obtenemos

$$u''\left[f(k^*) - g(k^*)\right]\left[f'(k^*) - g'(k^*)\right] = \left\{ \begin{array}{l} \beta f''(g(k^*))g'(k^*)u'\left[f(g(k^*)) - g(g(k^*))\right] + \\ \beta f'(g(k^*))u''\left[f(g(k^*)) - g(g(k^*))\right]\left[f'(g(k^*)) - g'(g(k^*))\right]g'(k^*) \end{array} \right\}$$

Omitiendo los argumentos y usando $g(k^*) = k^*$

$$u''(f' - g') = \beta f'' g' u' + \beta f' u''(f' - g')g'$$

que, usando $\beta f' = 1$ implica

$$u''(f' - g') = \beta f'' g' u' + u''(f' - g')g'$$

$$(f' - g')(1 - g') = \frac{f'' g' u'}{u'' f'} > 0$$

Por tanto $g' < 1$ dado que por propiedad v) $f' - g' > 0$.

Una policy function g con propiedades i) - vii) implica convergencia global.

Una prueba formal de convergencia global implica probar que $g(k) > k \ \forall k < k^*$ y $g(k) < k \ \forall k > k^*$

Proof. Notar que por ser la value function estrictamente concava

$$v(k_1) \leq v(k_0) + v'(k_0)(k_1 - k_0)$$

y

$$v(k_0) \leq v(k_1) + v'(k_1)(k_0 - k_1),$$

con desigualdad estricta si $k_0 \neq k_1$.

Sumando ambas desigualdades obtenemos

$$v(k_1) + v(k_0) \leq +v(k_0) + v(k_1) + (k_1 - k_0)(v'(k_0) - v'(k_1))$$

que implica

$$(k_1 - k_0)(v'(k_1) - v'(k_0)) \leq 0 \text{ con ¡ si } k_0 \neq k_1$$

Por tanto

$$[v'(k) - v'(g(k))]\,(k - g(k)) \leq 0 \tag{6.11}$$

Sabemos que $v'(k) = u'(f(k) - g(k))f'(k)$ y por la condicion de primer orden: $\beta v'(g(k)) = u'(f(k) - g(k))$.

Por tanto,

$$v'(k) - v'(g(k)) = u'(f(k) - g(k))f'(k) - u'(f(k) - g(k))/\beta = \frac{u'(f(k) - g(k))}{\beta}\,(\beta f'(k) - 1)$$

Dado que $u' > 0$ la desigualdad (6.11) implica

$$(\beta f'(k)-1)(k-g(k))\leq 0 \quad \text{con desigualdad estricta si } g(k)\neq k$$

$\square$

Problema con incertidumbre

Para simplificar consideraremos el caso de variables aleatorias discretas que toman valores en $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,...,a_N\}$

Sea $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ sea un espacio de probabilidad.

Definicion Un proceso estocastico consiste en una secuencia de variables aleatorias $z_t : \Omega \to A$.

Para cada $\omega \in \Omega$, la secuencia real $\{z_t(\omega)\}_{t=1}^{\infty}$ es llamada un sample path del proceso estocastico.

Sea $C=(c_1,...,c_n)$, con $c_i \in \mathcal{A}$, la probabilidad

$$P_{t+1,t+2,...,t+n}(C)=P\left(\{\omega\in\Omega : z_{t+1}(\omega)=c_1,...,z_{t+n}(\omega)=c_n\}\right).$$

Definicion Un proceso estocastico se dice estacionario cuando $P_{t+1,t+2,...,t+n}(C)$ son independientes de t para todo n y $C\in\mathcal{A}^n$.

Sea $(h_{t-s},...h_{t-1},h_t)$ una historia de s periodos, la probabilidad condicional

$$P_{t+1,t+2,...,t+n}(C\mid h_{t-s},...h_{t-1},h_t)=P\left(\begin{array}{c}\{\omega\in\Omega : z_{t+1}(\omega)=c_1,...,z_{t+n}(\omega)=c_n\}\\ \mid\{\omega\in\Omega : z_{t-s}(\omega)=h_{t-s},...z_{t+n}(\omega)=c_n\}\end{array}\right).$$

Definicion Un proceso estocastico de Markov (de primer orden) consiste en un proceso estocastico para el que se cumple

$$P_{t+1,t+2,...,t+n}(C\mid h_{t-s},...h_{t-1},h_t)=P_{t+1,t+2,...,t+n}(C\mid h_t)$$

para todo $t=2,3,...;\ n=1,2,...;\ s=1,...,t-1;$ y $C\in\mathcal{A}$.

Una cadena de Markov consiste en un proceso estocastico de Markov que toma valores en un conjunto discreto.

Ventaja de restringirnos a procesos de Markov: reduce el numero de variables de estado, solo es necesario conocer la ultima realizacion de z para conocer la distribucion de probabilidad de las realzaciones futuras de z.

Sea $\pi_t=(\pi_{t,1},...,\pi_{t,N})$ el vector fila que especifica la distribucion de probabilidad de la variable aleatoria z_t, $\pi_{t,i}\geq 0 \quad \forall i$ y $\sum_{i=1}^{N}\pi_{t,i}=1$.

Definimos una matriz de transicion como $P_{N\times N}$, donde $P_{i,j}=Pr(z_{t+1}=a_j\mid z_t=a_i)$.

Notar que $\sum_{j=1}^{N}P_{i,j}=1 \quad \forall i=1,...,N$.

La distribucion de probabilidad en $t+1$ esta dada por

$$\pi_{t+1} = \pi_t P \quad \forall t = 0, 1, ...$$

Una cadena de Markov esta definida entonces por el conjunto $\mathcal{A}$ donde toman valores las variables aleatorias z_t, con $t = 1, 2, ...$, una matriz de transicion $P_{N \times N}$, y una distribucion de probabilidad inicial π_0.

Notar que la distribucion de probabilidad

$$\pi_t = \pi_0 P^t$$

y por tanto para conocer la distribucion de probabilidad de largo plazo es necesario conocer como se comporta la secuencia $\{P^n\}_{n=0}^{\infty}$.

En particular las distribuciones de probabilidad π_t convergen a una distribucion invariante si existe π con

$$\pi = \pi P$$

Un conjunto $E \subseteq \mathcal{A}$ es un conjunto ergodico si cumple con $P(z_{t+1} \in E \mid \ z_t = e_i) = 1 \quad \forall t$ y $\forall e_i \in E$ y si no otro subconjunto de E tiene esa propiedad. Esto es, un conjunto ergodico es el conjunto de realizaciones para el cual el proceso estocastico solo toma valores en ese conjunto periodo a periodo.

Ejemplo 1

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Es facil verificar que

$$P^2 = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix},$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 9/16 & 7/16 \\ 7/16 & 9/16 \end{bmatrix},$$

y que

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Eso implica que para cualquier $\pi_0 = (p, 1-p)$, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \pi_n = [p/2 + (1-p)/2, p/2 + (1-p)/2] = [1/2, 1/2]$$

En este caso, las distribucioned de probabilidad π_t convergen a una distribucion invariante. El conjunto ergodico es $\{a_1, a_2\}$.

Ejemplo 2

$$P = \begin{bmatrix} 1-\gamma & \gamma/2 & \gamma/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

con $\gamma \in (0,1)$

Si el proceso empieza en a_1, existe una probailidad $1-\gamma$ que tome el valor a_1 en el periodo siguiente. Una vez que el proceso toma el valor a_2 o a_3 la probabilidad que vuelva a tomar el valor a_1 es cero. Se dice que a_1 es un estado de transito (transient state).

En este caso se puede verificar que

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

En este caso las distribuciones de probabilidad π_t convergen a $[0, 1/2, 1/2]$ y el conjunto ergodico es $\{a_2, a_3\}$.

Ejemplo 3

Sea

$$P = \begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ P_2 & 0 \end{bmatrix},$$

con P_1 y P_2 matrices de transicion de rango $k \times (N-k)$ y $(N-k) \times k$. Entonces

$$P^{2n} = \begin{bmatrix} (P_1P_2)^n & 0 \\ 0 & (P_2P_1)^n \end{bmatrix},$$

y

$$P^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & (P_1P_2)^n P_1 \\ (P_2P_1)^n P_2 & 0 \end{bmatrix},$$

En este caso P^n no converge y el conjunto ergodico es $\mathcal{A}$.

Por ejemplo, sea $N = 4$, $k = 2$ y

$$P_1 = P_2 = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n}+1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^i = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

Este proceso tiene ciclos pero el promedio de distribuciones de probabilidad π_t converge a $[1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$. En el largo plazo, el proceso toma valores en $\mathcal{A}$ con una distribucion uniforme.

Ejemplo 4
Sea

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

lo que implica

$$P^n = \begin{bmatrix} P_1^n & 0 \\ 0 & P_2^n \end{bmatrix},$$

En este caso, si $z_0 \in \{a_1, ..., a_k\}$, las siguiente realizaciones de z_t solo toman valores en $\{a_1, ..., a_k\}$. Similarmente, si $z_0 \in \{a_{k+1}, ..., a_N\}$ las siguiente realizaciones de z_t solo toman valores en $\{a_{k+1}, ..., a_N\}$. Por tanto, hay 2 conjuntos ergodicos dependiendo de la realizacion inicial z_0.

P^n converge si y solo si P_1^n y P_2^n convergen.

Para P_1 y P_2 como en el ejemplo 3

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

En dicho caso, π_t converge a $[1/2, 1/2, 0, 0]$ o $[0, 0, 1/2, 1/2]$ dependiendo de la realizacion inicial.

Ejemplo 5

$$P = \begin{bmatrix} 1-\gamma & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con $\alpha + \beta = 1$. En este caso, si el proceso toma el valor a_1, existe una probabilidad $1-\gamma$ que permanezca en a_1 en el periodo siguiente, una probabilidad $\alpha\gamma$ de tomar el valor a_2 y una probabilidad $\beta\gamma$ de tomar el valor a_3. Una vez que el proceso toma el valor a_2 o a_3 permanece en ese valor por siempre. En este caso existen 2 conjuntos ergodicos: $\{a_2\}$ y $\{a_3\}$.

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

En este caso P^n converge y cada fila de P es una distribucion invariante de π_t.

Teorema 11.1 de SLP:

Hay M conjuntos ergodicos, la secuencia $\frac{1}{n}\sum_i P^i \to Q$, y cualquier $\pi_0 Q$ es una distribucion invariante

Teorema: Una cadena de Markov tiene una unica distribucion invariante si $P_{i,j} > 0$ para todo $i, j = 1, ..., N$.

Decision bajo incertidumbre

Nos va a interesar resolver el siguiente problema secuencial

$$\max_{\{x_{t+1}(z^t)\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in \mathcal{A}^t} \beta^t Pr(z^t) F(x_t, x_{t+1}, z_t) \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \qquad & x_{t+1} \in \Gamma(x_t, z_t), \quad t = 0, 1, 2, ..., \\ & x_0 \in X \text{ dado.} \\ & z_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

donde $z^t = (z_1, z_2, ..., z_t)$.

Por ejemplo, la formulacion anterior es valida si se cumplen los axiomas de utilidad esperada.

La formulacion recursiva del problema anterior la podemos escribir como

$$v(x, z_i) = \max_{y \in \Gamma(x, z_i)} \left\{ F(x, y, z_i) + \beta \sum_{j=1}^{N} P(z_j \mid z_i) v(y, z_j) \right\} \quad \forall x \in X, z_i \in \mathcal{A}.$$

Un procedimiento analogo al caso sin incertidumbre se puede utilizar para probar la equivalencia de los problemas secuencial y recursivo y para probar la existencia y unicidad de v.

Ejemplo: Modelo neoclasico de crecimiento con shocks $z \in \{z_l, z_h\}$ y $F(k, z) = zF(k)$.

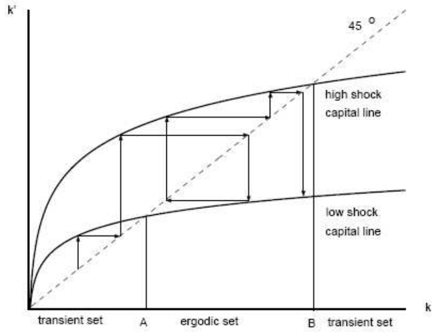


Figure 6.1: An example of (k,z) stochastic process when $z \in \{z_l, z_h\}$

Clase 7

Incertidumbre con distribuciones continuas de shocks

Definicion: Sea S un conjunto y sea $\mathcal{S}$ una familia de subconjuntos de S. $\mathcal{S}$ se define como una σ-algebra si

i) $\emptyset, S \in \mathcal{S}$;

ii) $A \in \mathcal{S}$ implica que $A^c \in \mathcal{S}$; y

iii) $A_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, ...$ implica $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$

Diremos que un par $(S, \mathcal{S})$ es un espacio medible. Cualquier conjunto $A \in \mathcal{S}$ lo denotaremos como un conjunto medible (en $\mathcal{S}$).

Definicion: Sea $(S, \mathcal{S})$ un espacio medible. Una medida es una funcion real extendida $\mu : \mathcal{S} \to \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tal que

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) $\mu(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{S}$; y

iii) si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia contable de conjuntos disjuntos en $\mathcal{S}$, entonces $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Un espacio de medida(measure space) es una triada $(S, \mathcal{S}, \mu)$, donde S es un conjunto, $\mathcal{S}$ es una σ-algebra asociada a S, y μ es una medida definida en $\mathcal{S}$.

Si $\mu(S) = 1$, entonces se dice que μ es una medida de probabilidad y $(S, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de probabilidad. En ese caso decimos que cualquier $A \in \mathcal{S}$ es un evento.

Definicion Dado un espacio medible $(S, \mathcal{S})$, una funcion real $f : S \to \mathbf{R}$ es una funcion medible con respecto a $\mathcal{S}$ si

$$\{s \in S : f(s) \leq a\} \in \mathcal{S}, \quad \forall a \in \mathcal{R}.$$

Si μ es una medida de probabilidad, entonces f es una variable aleatoria.

Nos va a interesar calcular esperanzas de funciones de variables aleatorias. Para funciones reales, usaremos la integral de Lebesgue para calcular la esperanza. La integral de Lebesgue difiere de la integral de Riemann.

Integral de Riemann: Sea $f : [a, b] \to \mathcal{R}_+$. Consideremos la suma $\sum_{i=1}^n y_i(a_i - a_{i-1})$, con $a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = b$. La integral de Riemann por debajo consiste en el supremo de las funciones $\sum_{i=1}^n y_i(a_i - a_{i-1})$ con $y_i \leq f(x)$ para $x \in [a_{i-1}, a_i]$. La integral de Riemann por encima consiste en el infimo de las funciones $\sum_{i=1}^n y_i(a_i - a_{i-1})$ con $y_i \geq f(x)$ para $x \in [a_{i-1}, a_i]$. El supremo y el infimo de esas funciones se calcula tomando grillas mas finas $(n \to \infty)$. Si las integrales de Riemann por debajo y por encima coinciden, entonces la integral de Riemann existe y la denotamos $\int_a^b f(x)dx$.

La integral de Lebesgue de f en $[a, b]$ se define usando las funciones $\sum_{i=1}^n y_i\lambda(A_i)$, con $0 \leq y_1 \leq ... \leq y_n$, $A_i = \{x : y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}\}$, y $\lambda(A_i)$ la medida de Lebesgue en el conjunto A_i (la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}$ consiste en la longitud de cada intervalo). La integral de Lebesgue consiste el limite de esa suma cuando $n \to \infty$.

La integral de Lebesgue es igual a la integral de Riemann cuando la segunda existe. Hay casos donde la integral de Lebesgue existe y la integral de Riemann no (Ejercicio 7.16 de SLP).

Si μ es una medida de probabilidad, denotaremos la esperanza de la funcion $f : S \to R$ como $\int_S f(s)\mu(ds)$. Una funcion es integrable en S cuando $\int_S f(s)\mu(ds)$ es finita.

Definicion Sea $(S, \mathcal{S})$ un espacio medible. Una funcion de transicion es una funcion $Q : S \times \mathcal{S} \to [0, 1]$ tal que

i) para cada $s \in S$, $Q(s, \cdot)$ es una medida de probabilidad en $(S, \mathcal{S})$; y

ii) para cada $A \in \mathcal{S}$, $Q(\cdot, A)$ es una funcion medible en $\mathcal{S}$.

En el caso de procesos de Markov, $Q(s, A)$ denota la probabilidad condicional de obervar el evento A en el periodo siguiente dado que en el periodo corriente se observo s.

Para cualquier funcion medible f, definimos el operador T como

$$(Tf)(s) = \int f(s')Q(s, ds') \quad \forall s \in S.$$

Por tanto, Tf denota la probabilidad condicional de f dado que el estado hoy es s.

Para cualquier medida de probabilidad λ en $(S, \mathcal{S}$, definimos el operador T^* como

$$(T^*\lambda)(A) = \int Q(s, A)\lambda(ds), \quad \forall A \in \mathcal{S}.$$

El operador T^* indica la probabilidad de que el estado en el periodo siguiente este en el conjunto A dado que el estado hoy se obtiene de una distribucion de probabilidad λ.

Definition Decimos que la funcion de transicion Q en $(S, \mathcal{S}))$ tiene la propiedad de Feller si el operador T mapea funciones continuas y acotadas en funciones continuas y acotadas.

Ahora estamos en condiciones de mostrar las condiciones bajo las cuales el problema recursivo estocastico tiene una solucion. Tipicamente, vamos a trabajar con funciones f :

$\mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$. La σ-algebra mas chica que contiene todos los conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^l$ se denomina algebra de Borel. Cualquier conjunto en el algebra de Borel en $\mathbf{R}^l$ se denomina un conjunto de Borel.

Supuesto 9.4 *El conjunto X es un conjunto de Borel convexo en $\mathbf{R}^l$, con subconjuntos de Borel $\mathcal{X}$.*

Supuesto 9.5 *Se cumple una de las siguientes condiciones:*

a. *Z es un conjunto contable y $\mathcal{Z}$ es la σ-algebra que contiene todos los subconjuntos de Z; o*

b. *Z es un conjunto de Borel compacto en $\mathbf{R}^k$, con subconjuntos de Borel $\mathcal{Z}$, y la funcion de transicion Q en $(Z, \mathcal{Z})$ tiene la propiedad de Feller.*

Supuesto 9.6 *La correspondencia $\Gamma : X \times Z \to X$ es no-vacia, toma valores en conjuntos compactos, y es continua.*

Supuesto 9.7 *La funcion $F : A \to \mathbf{R}$ es continua y acotada, y $\beta < 1$.*

Teorema 9.6 Dado un espacio y funciones que cumplen los supuestos 9.4-9.7., el operador T

$$(Tf)(x,z) = \sup_{y \in \Gamma(x,z)} \left\{ F(x,y,z) + \beta \int f(y,z')Q(z,dz') \right\}$$

i) mapea funciones continuas y acotadas en funciones continuas y acotadas, $T : C(S) \to C(S)$;

ii) tiene un unico punto fijo $v \in C(S)$; y

iii) para cualquier $v_0 \in C(S)$,

$$\|T^n v_0 - v\| \leq \beta^n \|v_0 - v\|, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Bajo suspuestos adicionales sobre la funcion de transicion Q se puede probar monotonicidad y concavidad de la value function v. Las condiciones anteriores muestran bajo que condiciones existe una solucion del problema recursivo estocastico cuando los shocks siguien una distribucion continua.

El caso tipico que nos va a interesar es cuando el de procesos autoregresivos

$$z_t = \rho z_{t-1} + (1-\rho)\mu_z + \varepsilon_t,$$

con $\rho \in (0,1)$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Para resolver el problema usando metodos numericos vamos a precisar discretizar z_t. Un metodo simple es el sugerido por Tauchen (Economics Letters, 1986). Consiste en elegir una grilla $z^1, z^2, ...z^N$, donde z^N es un multipo de $\sigma_y = \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\rho^2)}\right)^{1/2}$, $z^1 = -z^N$, y los puntos de grilla son equidistantes.

Sea $\Delta = z^j - z^{j-1}$ la distancia de cada intervalo de grilla, y F la funcion de distribucion de ε. Las celdas de la matriz de transicion P se calculan como sigue

i) Para $j = 2, 3, ...N - 1$

$$P_{i,j} = Pr(z_{t+1} = z^j \mid z_t = z^i) = Pr(z^j - \Delta/2 \leq \rho z^i + (1-\rho)\mu_z + \varepsilon_t \leq z^j + \Delta/2),$$

que equivale a

$$P_{i,j} = F\left(z^j + \Delta/2 - \rho z^i - (1-\rho)\mu_z\right) - F\left(z^j - \Delta/2 - \rho z^i - (1-\rho)\mu_z\right),$$

i) Para $j = 1, N$

$$P_{i,1} = F\left(z^1 + \Delta/2 - \rho z^i - (1-\rho)\mu_z\right), \text{ y}$$

$$P_{i,N} = 1 - F\left(z^N - \Delta/2 - \rho z^i - (1-\rho)\mu_z\right).$$

Tauchen (86) argumenta que si bien esa distribucion de puntos de grilla y de probabilidades de transicion no es la mas eficiente, el metodo tiene la ventaja de la simplicidad y que es robusto (hay metodos mas eficientes para asignar puntos de grilla que requieren de algoritmos que pueden no converger).

En Tauchen y Hussein (Econometrica, 1991), se propone una discretizacion mas eficiente, basada en el criterio de cuadratura numerica. Esto es, sea $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, y sean $x^1, x^2, ..., x^N \in \mathbf{R}^m$ y $\omega^1, \omega^2, ..., \omega^N$. Los puntos x^i y las ponderaciones ω^i estan elegidos de modo de que

$$\left| \int g(x)F(dx) - \sum_{i=1}^{N} g(x^i)\omega^i \right|$$

sea lo menor posible, independientemente de la funcion g.

Definicion de equilibrio con incertidumbre

La definicion de equilibrio es analoga al caso sin incertidumbre. La diferencia es que debemos ser cuidadosos con respecto a la estructura de mercado. Empezaremos viendo el caso con mercados completos.

Sea una economia con N distintos tipos de consumidores (con una medida 1 de cada tipo de consumidor).

Para simplificar, empezaremos por el caso de 2 periodos, sin utilidad del ocio, y con M posibles estados de la naturaleza en el periodo 2. El problema de un consumidor de tipo i consiste en

$$\begin{array}{rl} \underset{\{c_1,c_{2,1},\ldots,c_{2,M}\}}{Max} & \left\{u(c_1)+\sum_{j=1}^{M}\beta\pi_j u(c_{2,j})\right\} \\ s.a. & c_1+\sum_{j=1}^{M}p_h c_{2,j}=\omega_1^i+\sum_{j=1}^{M}p_h\omega_{2,j}^i. \\ & c_1, c_{2,j}\geq 0 \quad \forall j=1,...,M. \end{array}$$

donde ω_1^i denota la asignaciond de bienes (endowment) que el consumidor recibe en el primer periodo y $\omega_{2,h}^i$ denota la asignacion de bienes que el consumidor i recibe al comienzo del periodo 2. Por ejemplo, se podria interpretar a ω^i como el salario que se obtiene por ofrecer la unidad de trabajo disponible para el consumidor.

Notar que dado que se asume mercados completos, no importa la estructura de activos en el modelo. Cualquier asignacion de recursos que el consumidor obtenga con M activos a_j, con cada activo j pagando $a_{j,i}$ en el estado i y con los M vectores $(a_{j,1}, a_{j,2}, ..., a_{j,M})$ siendo linealmente independientes, la puede replicar con Arrow-Debreu securities. Una Arrow-Debreu security para el estado i es un activo que paga 1 si el estado i es el estado que se realiza en el periodo 2 y 0 en todo otro estado.

Las condiciones de primer orden del problema anterior consisten en

$$u'(c_1^i)=\lambda$$
$$\beta\pi_j u'(c_{2,j}^i)=\lambda p_j \quad \forall j=1,...,M,$$

que implican

$$\frac{u'(c_{2,j}^i)}{u'(c_1^i)}=\frac{p_j}{\beta\pi_j} \quad \forall j=1,...,M\ \forall i=1,...,N. \tag{7.1}$$

Notar que el segundo miembro de la ecuacion (7.1) es comun para todos los consumidores. Eso implica que con mercados completos, las tasas marginales de sustitucion entre distintos estados de la naturaleza son iguales para todos los agentes (si $u(c)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ los ratios de consumo se igualan entre agentes, por lo cual si la riqueza del consumidor h es el doble de la riqueza del consumidor l, el consumidor h va a consumir el doble que l independientemente del periodo o estado de la naturaleza).

Un equilibrio competitivo consiste en un conjunto de cantidades $\left\{c_1^i, c_{2,j}^i\right\}_{i=1,...,N \text{ y } j=1,...,M}$ y precios $\{p_j\}_{j=1}^M$ tales que

1) $\left\{c_1^i, c_{2,j}^i\right\}_{j=1,...,M}$ maximiza el problema del consumidor i dados los precios $\{p_j\}_{j=1}^M$, para todo $i=1,...,N$

2) Los mercados se limpian: $\sum_{i=1}^N c_{2,j}^i=\sum_{i=1}^N \omega_{2,j}^i \quad \forall j=1,...,M.$

Consideremos ahora el problema del planificador.

$$\begin{aligned}
\underset{\{c_1^i, c_{2,1}^i, \ldots, c_{2,M}^i\}_{i=1}^N}{Max} \quad & \left\{\sum_{i=1}^N \phi^i \left[u(c_1^i) + \sum_{j=1}^M \beta \pi_j u(c_{2,j}^i)\right]\right\} \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^N c_1^i = \sum_{i=1}^N \omega_1^i \\
& \sum_{i=1}^N c_{2,j}^i = \sum_{i=1}^N \omega_{2,j}^i \quad \forall j = 1, ..., M \\
& c_1^i, c_{2,j}^i \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., M, i = 1, ..., N.
\end{aligned}$$

Las ponderaciones ϕ^i denotan el peso que el planificador le da a cada tipo de consumidor i. Las condiciones de primer orden del planificador son

$$\phi^i u'(c_1^i) = \lambda_1 \quad \forall i = 1, ..., N$$
$$\phi^i \beta \pi_j u'(c_{2,j}^i) = \lambda_j \quad \forall i = 1, ..., N$$

lo que implica

$$\frac{u'(c_{2,j}^i)}{u'(c_1^i)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 \pi_j \beta}.$$

Por tanto, dado que en el planificador tambien iguala las tasas marginales de sustitucion entre estados y que se cumple las restricciones de recursos agregadas, el equilibrio competitivo se podria implementar como la solucion del problema del planificador luego de elegir los pesos ϕ^i apropiadamente (por ejemplo, el planificador deberia asignar ponderaciones mas altas a consumidores con mas riqueza).

Notar que en este caso los consumidores pueden ser heterogeneos. De ser asi, este tipo de problema permite estudiar como los consumidores comparten riesgo. De lo contrario, si todos los consumidores recibiecen los mismas asignaciones de recurso en cada estado (y compartiesen las mismas preferencias), entonces no habria lugar para que exista intercambio de activos. En equilibrio, cada consumidor consume su asignacion de recursos en cada estado y los precios se determinan de modo que no exista intercambio de activos entre agentes.

De existir heterogenidad, la ventaja que nos brinda poder resolver el equilibrio competitivo como la solucion de un problema del planificador puede no ser tan significativa ya que no conocemos las ponderaciones ϕ^i que el planificador debe asignar a cada tipo de agente.

Sin embargo, existe una clase general de funciones de utilidad para las cuales los precios se pueden resolver como funcion de la riqueza agregada en la economia, sin necesidad de conocer la distribucion de riqueza entre los agentes. En esos casos, los precios son tales que el agente representativo (cuya asignacion de recursos es igual a la asignacion media) encuentra su asignacion original de recursos optima y por tanto no comercia activos financieros. Una vez que conocemos los precios de equilibrio, podemos resolver el problema de cada consumidor.

Example 7.12. *Sea una economia con $N = 2$ y $M = 2$. Para evitar confusion con la notacion denotamos los estados posibles como $\{A, B\}$ (alto, bajo). La funcion de utilidad $u(c) = log(c)$. Los endowments del agente i son $\omega^i(1, g_A^i, 1g_B^i)$, donde ω^i denota el endowment en el primer periodo, g_A^i la tasa de crecimiento del endowment del individuo i si el estado del periodo 2 es A, y g_B^i la tasa de crecimiento del endowment del individuo i si el estado del periodo 2 es B.*

$$\begin{array}{ll} \underset{\{c_{2,A},c_{2,B}\}}{Max} & \{u(c_1) + \beta\left[\pi u(c_{2,A}) + (1-\pi)u(c_{2,B})\right]\} \\ s.a. & c_1 + p_A c_{2,A} + p_B c_{2,B} = \omega^i\left(1 + g_A^i p_A + g_B^i p_B\right). \\ & c_1, c_{2,j} \geq 0 \text{ para } j = A, B. \end{array}$$

Las condiciones de primer orden del problema son las mismas que en el caso anterior:

$$u'(c_1^i)p_A = \beta\pi u'(c_{2,A}^i), \ y$$
$$u'(c_1^i)p_B = \beta\pi u'(c_{2,B}^i).$$

Por los supuestos sobre u, las condiciones anteriores se pueden escribir como:

$$c_{2,A}^i p_A = \beta\pi\left[\omega^i\left(1 + g_A^i p_A + g_B^i p_B\right) - p_A c_{2,A}^i - p_B c_{2,B}^i\right], \ y$$
$$c_{2,B}^i p_B = \beta(1-\pi)\left[\omega^i\left(1 + g_A^i p_A + g_B^i p_B\right) - p_A c_{2,A}^i - p_B c_{2,B}^i\right].$$

Haciendo algebra, se puede verificar que las demandas por los Arrow-Debreu securities satisfacen

$$c_{2,A}^i = \omega^i \frac{(1 + g_B^i p_B + g_A^i p_A)\pi\beta}{p_A(1+\beta)}$$
$$c_{2,B}^i = \omega^i \frac{(1 + g_B^i p_B + g_A^i p_A)(1-\pi)\beta}{p_B(1+\beta)}$$

Las condiciones de equilibrio para p_A y p_B son

$$c_{2,j}^1 + c_{2,j}^2 = \omega^1 g_j^1 + \omega^2 g_j^2 = \Omega_{2,j} \quad \text{para } j = A, B.$$

que implican

$$c_{2,A}^1 + c_{2,A}^2 = \frac{(\Omega_1 + \Omega_{2,B}p_B + \Omega_{2,A}p_A)\pi\beta}{p_A(1+\beta)} = \Omega_{2,A} \tag{7.2}$$

$$c^1_{2,B} + c^2_{2,B} = \frac{(\Omega_1 + \Omega_{2,B}p_B + \Omega_{2,A}p_A)(1-\pi)\beta}{p_B(1+\beta)} = \Omega_{2,B} \tag{7.3}$$

Notar que las demandas individuales son lineales en la riqueza. Es facil verificar que, en equilibrio, p_A, p_B dependen solo de Ω_1, $\Omega_{2,A}$, y $\Omega_{2,B}$ y no dependen de la distribucion de endowments entre los agentes. Cualquier distribucion de riqueza que mantenga constantes los recursos agregados en cada estado.

Esa propiedad es valida para funciones de utilidad con coeficiente de tolerancia al riesgo absoluta lineal en consumo, es decir para u con

$$-\frac{u'(c)}{u''(c)} = a + bc$$

Notar que $\int \frac{u''(c)}{u'(c)} = -\int 1/(a+bc) \Rightarrow log(u'(c)) = A - (1/b)log(a+bc) \Rightarrow u'(c) = B(a+bc)^{-1/b}$ *donde A y B son 2 constantes.*

Consideramos el mismo ejemplo pero donde los consumidores tienen acceso a un solo activo, que suponemos para 1 en ambos estados. El problema de los consumidores consiste en

$$\begin{aligned}
\underset{\{b\}}{Max} \quad & \{u(c_1) + \beta\,[\pi u(c_{2,A}) + (1-\pi)u(c_{2,B})]\} \\
s.a. \quad & c_1 + pb = \omega^i, \\
& c_{2,A} = \omega^i g^i_A + b, \\
& c_{2,B} = \omega^i g^i_B + b, \\
& c_1, c_{2,j} \geq 0 \ para\ j = A, B
\end{aligned}$$

La condicion de primer orden es

$$pu'(c^i_1) = \beta\left[\pi u'(c^i_{2,A}) + (1-\pi)u'(c^i_{2,B})\right]$$

Notar que en este caso los agentes pueden compartir riesgo de modo imperfecto y las tasas marginales de sustitucion entre distintos estados no se igualan a traves de los agentes.

La anterior condicion de primer orden implica

$$\frac{p}{\omega^i - pb} = \beta\left[\frac{\pi}{\omega^i g^i_{2,A} + b} + \frac{1-\pi}{\omega^i g^i_{2,B} + b}\right]$$

Se puede verificar que la demanda optima por bonos b es una funcion no lineal en los endowments de los individuos. En este caso, la distribucion de endowments importa para la determinacion de precios de equilibrio.

Ver Rubinstein (JFE, 1974) y notas de Per Krusell para un analisis mas detallado de las condiciones para las cuales se pueden agregar las demandas individuales sin incorporar la distribucion de variables de estado.

En el caso de la formulacion recursiva, la presencia de mercados completos (y para ciertas funciones de utilidad) nos permite especificar los equilibrios competitivos recursivos de modo similar a como lo hicimos incertidumbre. La unica diferencia es que las leyes de movimiento agregado van a depender de los shocks agregados.

A continuacion definiremos el equilibrio competitivo recursivo en una economia con incertidumbre en donde no podemos agregar las demandas individuales y por tanto los precios de equilibrio dependen de la distribucion de variables de estado. Asumiremos cada consumidor enfrenta shocks idiosincraticos que siguen un proceso de Markov y que no hay incertidumbre agregada. Es decir que los shocks individuales se cancelan en el agregado. Los consumidores pueden emitir o comprar un bono libre de riesgo que paga 1 en todos los estados.

Considere la siguiente economia (Huggett, 1993), donde el endowment del consumidor i esta sujeto a shocks idiosincraticos, y donde los consumidores tienen acceso a un unico activo financiero: un bono que paga 1 independientemente de la realizacion de los estados en el periodo siguiente. El bien de consumo no se puede almacenar por lo que dicho bono es la unica herramienta disponible para los consumidores que quieran transferir consumo de un periodo a otro.

La formulacion recursiva del problema de cada consumidor es

$$\begin{aligned} v(b, z_i) &= \underset{b' \geq \underline{b}}{Max} \left\{ u(c) + \beta \sum_{j=1}^{M} \pi_{i,j} v(b', z_j) \right\} \\ s.a. \qquad c + pb' &= b + z_i \end{aligned}$$

z_j denota la realizacion idiosincratica del endowment y p el precio del bono que asumiremos es funcion de la variable agregada Λ, que denota la distribucion de consumidores en la economia.

Definiremos un equilibrio competitivo estacionario como un conjunto de policy function $g(b, z)$ value function $v(b, z)$, precio p y distribucion Λ que cumple con

1) $g(b, z)$ maximiza el problema recursivo para todo (b, z) y $v(b, z)$ es la solucion del problema recursivo.

2) El mercado de bonos se equilibra: $\int g(b, z)\Lambda(db, dz) = 0$

3) La distribucion de consumidores en la economia es constante en el tiempo. Es decir $\Lambda'(b, z) = \Lambda(b, z)\ \forall_{\underline{,}} z$, con

$$\Lambda'(\bar{b}, z_j) = \int \mathbb{1}_{[g(b,z)=\bar{b}]} \Lambda(db, dz_i) \pi_{i,j}.$$

Clase 8

Example 8.13. *Considere la siguiente economia de Huggett, donde el endowment del consumidor i sigue el siguiente proceso estocastico:*

$$\omega_t^i = e^{z_t^i}, \ \ con$$
$$z_t^i = z_{t-1}^i + \varepsilon_t^i$$

donde $\varepsilon_t^i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ *y* ε_t^i, ε_t^j *son no correlacionadas para todo* $i, j \in [0,1]$ *y para todo* $t = 1, 2, \ldots$. *Esto significa que los shocks* ε_t^i *son idiosincraticos y que una vez que la distribucion de endowments* ω^i *individuales alcanza una distribucion invariante, la distribucion de endowments en la economia (que por ley de los grandes numeros es igual a la distribucion de largo plazo de los endowments individuales) es la misma periodo a periodo, y el ingreso agregado es constante en el tiempo: En el agregado, los consumidores que mejoran su ingreso (endowment) de un periodo a otro se compensan con los consumidores que empeoran su ingreso.*

Vamos a usar el metodo discreto para resolver dicha economia. Por tanto, $b \in \mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_N)$ *y* $z \in \mathcal{Z} = (z_1, z_2, ..., z_M)$. *Usaremos el criterio de Tauchen (1986) para discretizar el proceso para z.*

$$v(b, z_i) = \underset{b' \in \mathcal{B}}{Max} \left\{ u(c) + \beta \sum_{j=1}^{M} \pi_{i,j} v(b', z_j) \right\}$$
$$s.a. \qquad 0 \leq c + pb' = b + e^{z_i}$$

En este caso, las value y policy function van a estar representadas por sendas matrices $V_{N \times M}$ *y* $G_{N \times M}$. *La distribucion de agentes en la economia va estar representada por una matrix* $\Lambda_{N \times M}$ *donde cada celda* $\Lambda_{i,j}$ *representa la fraccion de consumidores que al comienzo del periodo tienen* b_i *bonos y un endowment de* $\omega_j = e^{z_j}$. *Definiremos la matriz de transicion* $T_{N \times M \times N \times M}$ *de la siguiente manera:*

$$T_{i,j;i',j'} = \pi(j, j') \mathbb{1}_{[G_{i,j} = b_{i'}]}.$$

La matriz T indica la fraccion de consumidores que empiezan el periodo siguiente con $b_{i'}$ *bonos y endowment* $\omega_{j'}$, *dado que empezaron este periodo con* b_i *bonos y endowment* ω_j.

Por tanto, un equilibrio competitivo estacionario va a consistir en un conjunto de matrices V, G, Λ, *y precio p que cumplen con*

1) G es el argumento maximo del problema recursivo y V es la solucion del problema recursivo para todo $(b, z) \in \mathcal{B} \times \mathcal{Z}$.

2) El mercado de bonos se equilibra:

$$\int g(b, z)\Lambda(db, dz) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} G_{i,j}\Lambda_{i,j} = 0$$

3) La distribucion de consumidores en la economia es constante en el tiempo. Es decir $\Lambda' = \Lambda$, con

$$\Lambda'_{i',j'} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \Lambda_{i,j} T_{i,j;i',j'}.$$

Algunas apreciaciones sobre este tipo de economias.

- *Restriccion natural de endeudamiento (natural borrowing constraint) Al postular el modelo impusimos que*

  $$b' \geq \underline{b}$$

  Estamos resolviendo una economia donde los agentes tienen un costo infinito de hacer default y por tanto pagan sus deudas en todos los periodos. Eso implica que no deberian poder pedir prestado mas de lo que pueden pagar. Aiagari(1994) denomino la restriccion natural de endeudamiento al caso donde

  $$\underline{b} = -\omega_1 / r$$

  donde $r = 1/p - 1$ denota la tasa de interes (que es constante en equilibrio). Esa restriccion implica que los agentes no pueden pedir prestado mas que el valor presente descontado de la realizacion mas baja del endowment. De ese modo, el consumidor siempre va a poder pagar su deuda. En el peor de los casos va a consumir 0 en todos los periodos futuros si tiene la mala suerte que $\omega_t = \omega_1$ para todo t. Notar que en dicho caso la restriccion de endeudamento depende de los precios de equilibrio.

  En nuestro ejemplo numerico impusimos una restriccion de endeudamiento ad-hoc

- *Se puede probar que en equilibrio $\beta/p = \beta(1 + r) < 1$ En el problema no discretizado, la condicion de primer orden es*

$$u'(c_t) \geq \beta(1+r)E_t u'(c_{t+1})$$

La desigualdad aparece porque la restriccion de endeudamiento puede saturarse en algunos estados.

Definimos M_t como

$$M_t = \beta^t (1+r)^t u'(c_t)$$

En el modelo M_t es una variable aleatoria que toma valores no negativos en todos los periodos.

La condicion de primer orden del problema implica que

$$\beta^t (1+r)^t \left[\beta(1+r)E_t(u'(c_{t+1})) - u'(c_t)\right] = E_t(M_{t+1} - M_t) \leq 0,$$

Por tanto, se dice que M_t es una supermantingala. Dado que M_t es nonegativa, M_t converge a una variable aleatoria no negativa $\bar{M}$. En equilibrio no puede cumplise que

1) $\beta(1+r) > 1$. En ese caso claramente $u'(c_t)$ converge a cero y por tanto $c_t \to \infty$. Pero los consumidores solo pueden consumir infinito si $b \to \infty$ pero una situacion donde todos los consumidores acumulan un numero infinito de bonos no puede ser un equilibrio.

2) $\beta(1+r) = 1$ Chamberlain and Wilson (2000) prueban que en dicho caso tambien los consumidores acumularian un numero infinito de bonos y por tanto no puede ser un equilibrio.

Notar que en el ejemplo resuelto en el codigo las demandas de bonos son casi lineales en b excepto para los agentes que estan restringidos en lo que pueden pedir prestado (lo que introduce no linealidades). Eso explica que el precio p de equilibrio difiera de $1/\beta$ (el precio que se observaria en una economia con agente representativo) pero no significativamente.

Dada la discretizacion del problema, la demanda agregada es tipicamente discontinua: no hay un consumidores marginales sino una masa positiva de consumidores marginales.

En el ejemplo, la distribucion de bonos muestra que hay una masa de agentes que estan restringidos en lo que pueden pedir prestado o estan cercanos a estar restringidos en un futuro proximo (b cercano a $\underline{b}$). Otros consumidores logran acumular bonos. La acumulacion de bonos los ayuda a autoasegurarse (parcialmente) ante shocks negativos en el ingreso.

Ver que la sensibilidad del consumo de equilibrio a cambios en el endowment varia dependiendo de la posicion inicial de bonos. Los agentes con deuda estan menos capacitados para absorber shocks negativos a su ingreso.

En esta economia las tasas marginales de sustitucion entre estados/periodos pueden diferir para agentes diferentes (podria haber ganancia de comercio entre agentes). Por tanto, la asignacion de recursos de equilibrio puede no ser Pareto Optima. Eso implica que pueden haber intervenciones del gobierno que mejoren el bienestar de los consumidores.

Consideraremos la siguiente intervencion: el gobierno grava los endowments (ingresos laborales) con un tasa de impuestos τ y redistribuye lo recaudado otorgando una partida fija F a cada consumidor. El gobierno no emite deuda y por tanto, lo distribuido en cada periodo es igual a lo recaudado

El problema de cada consumidor consiste ahora en

$$\begin{aligned} v(b, z_i) &= \underset{b' \in \mathcal{B}}{Max} \left\{ u(c) + \beta \sum_{j=1}^{M} \pi_{i,j} v(b', z_j) \right\} \\ s.a. \quad & 0 \leq c + pb' = b + e^{z_i}(1-\tau) + F. \end{aligned}$$

El equilibrio recursivo estacionario se define de la misma manera, solo que ahora imponemos la restriccion adicional

4) El gobierno equilibra sus cuentas

$$F = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \Lambda_{i,j} \tau \omega_j = \tau \Omega,$$

donde Ω denota el ingreso (endowment) agregado en el equilibrio estacionario.

Notar que la distribucion de bonos no importa para calcular la recaudacion agregada y por tanto F lo podemos calcular antes de conocer los precios y decisiones optimas de los consumidores.

El precio de los bonos es mas bajo en la economia con impuestos y redistribucion. Ello podria deberse a una menor necesidad de los consumidores por acumular bonos ya que el gobiernos los asegura parcialmente con ese esquema de impuestos y transferencias.

Otra posible intervencion del gobierno consiste en comprar bonos y financiar el pago de intereses con impuestos. Vamos a considerar el caso donde el gobierno mantiene una deuda constante e igual a D y financia los intereses con un impuesto de suma fija F.

El problema de los consumidores consiste en

$$\begin{aligned} v(b, z_i) &= \underset{b' \in \mathcal{B}}{Max} \left\{ u(c) + \beta \sum_{j=1}^{M} \pi_{i,j} v(b', z_j) \right\} \\ s.a. \quad & 0 \leq c + pb' = b + e^{z_i}(1-\tau) - F. \end{aligned}$$

La condicion de equilibrio 2) es igual a

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} G_{i,j}\Lambda_{i,j} - D = 0$$

La condicion de equilibrio 4) es igual a

$$pD + F = D$$

Lo recaudado en cada periodo por impuestos o emision de deuda es igual a los gastado en el periodo por pago de vencimientos de deuda.

En economias donde existen distorsiones que podrian ser parcialmente corregidas por la intervencion de un gobierno, nos va a interesar conocer que tan significativas son las ganancias de bienestar. Un criterio comunmente empleado es evaluar las ganancias (o perdidas) de bienestar en terminos de consumo.

Para ello va a ser importante especificar el agente y momento del tiempo donde se evalua la utilidad esperada (en este caso, antes o despues que cada agente reciba su endowment). Un criterio usual es usar la utilidad promedio en el equilibrio estacionario, que coincide con la utilidad esperada que tendria un agente que es asignado a uno de los estados posibles de acuerdo a la distribucion Λ. *O puede ser interpretado como el promedio de utilidades esperadas futuras de los agentes de la economia, es decir, la utilidad de un planificador que asigna el mismo peso a todos los agentes de la economia.*

Denotamos esa medida de bienestar como W, *donde*

$$W = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \Lambda_{i,j} V_{i,j}$$

En teoria, con N,M *suficientemente altos, esa suma es suficientemente proxima a*

$$W = E\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Para medir como cambia el bienestar por pasar de la economia A *a la economia* B *calcularemos en que proporcion habria que cambiar el consumo a los agentes que viven en* A *para que esten indiferentes entre vivir en* A *o vivir en* B. *Formalmente, nos interesa saber el valor de* λ *para el que*

$$E\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u((1+\lambda)c_t^A) = E\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^B)$$

con $u(c) = c^{1-\sigma}/(1-\sigma)$*, la ecuacion anterior implica*

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \frac{(1+\lambda)^{1-\sigma} {c_t^A}^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right] = E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \frac{{c_t^B}^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right]$$

que implica

$$\lambda = \left(\frac{W^B}{W^A}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} - 1.$$

La ganancia de bienestar observada en la economia con impuestos y redistribucion no es sorprendente porque esa politica va en la direccion de corregir las ineficiencias derivadas de la ausencia de mercados completos. En esta economia, la politica optima seria poner un impuesto de 100% al ingreso. De ese modo, se obtendria una asignacion de recursos donde todos los consumidores consumen una cantidad igual al ingreso agregado (per capita). Esa seria la asignacion con mercados completos cuando en el periodo inicial los consumidores reciben un ingreso inicial igual al ingreso per capita.

Dos comentarios finales sobre la medida anterior

1) Es una medida promedio. Podria interesarnos comparar como distintas politicas afectan a distintos agentes en la economia. Por ejemplo, podriamos evaluar como cambia el bienestar por tipo de ingreso. Ver ultimo grafico.

2) Compara un equilibrio estacionario con otro. En realidad, luego de implementar una politica/reforma (en el modelo), la economia tipicamente atraviesa por un periodo de transicion hacia el nuevo equilibrio estacionario. Un calculo mas apropiado para medir el beneficio/costo deberia incluir ese periodo de transicion.

Aiyagari (QJE, 1994) considera una economia donde existe produccion y los consumidores pueden acumular capital.

Krusell and Smith (JPE, 1998) considera una economia donde existe produccion, los consumidores pueden acumular capital, y existen shocks agregados ademas de los shocks idiosincraticos. Muestran como se puede resolver equilibrio aproximado sin necesidad de utilizar la distribucion de riqueza como variable de estado.

Clase 9

Precios de activos

Considere una economia donde

i) hay una medida 1 de consumidores;

ii) M realizaciones de un shock agregado z;

iii) N activos financieros, donde el activo financiero j paga dividendos $d^j(z)$;

iv) los consumidores comparten las mismas preferencias y reciben inicialmente una unidad de cada uno de los activos financieros;

v) la oferta de los activos financieros es fija y por tanto hay una unidad de cada activo financiero;

vi) el bien de consumo no se puede almacenar.

El problema de cada consumidor se puede plantear como

$$v(x, z_i) = \underset{x' \in \Gamma(x,z_i)}{Max} \left\{ u(c) + \beta \sum_{j=1}^{M} \pi_{i,j} v(x', z_j) \right\}$$

$$s.a. \qquad c + \sum_{j=1}^{N} x'^j p^j(z_i) = \sum_{i=1}^{N} x^j \left(p^j(z_i) + d^j(z_i) \right), \text{ y}$$

$$\Gamma(x, z_i) = \left\{ x' \in \mathbf{R}^N : \sum_{j=1}^{N} \left[x^j \left(p^j(z_i) + d^j(z_i) \right) - x'^j p^j(z_i) \right] \geq 0 \text{ y } 0 \leq z^j \leq \bar{z} \; \forall j = 1, ..., N \right\},$$

donde $\bar{z} > 1$.

Es facil verificar que dados $p(z)$, y bajo el supuesto de continuidad de u, existe una unica solucion del problema recursivo.

En este caso, la variable de estado agregada relevante para la determinacion de precios de equilibrio es el shock agregado. Dado que todos los consumidores son iguales y empiezan con la misma asignacion inicial de activos financieros, toman las mismas decisiones en todos los periodos y estados y por tanto la distribucion de riqueza (activos financieros) permanece constante en el tiempo y no es necesaria incorporarla como variable de estado agregada. Notar que dado que los mercados pueden ser incompletos (por ejemplo, con $N < M$), si los consumidores no empezaran del mismo punto de partida, la distribucion de riqueza podria variar con las realizaciones del shock agregado z, lo que tipicamente incidiria en la determinacion de precios de equilibrio.

Esta economia ejemplifica un caso donde se pueden resolver los precios como si hubiese un agente representativo en la economia pese a que pueden existir mercados incompletos.

Un equilibrio competitivo consiste en un conjunto de funciones $g(x, z) = (g^1(x, z), ..., g^N(x, z))$, $v(x, z)$ y $p(z) = (p^1(x, z), ..., p^N(x, z))$ tales que

1)

$$
\begin{aligned}
g(x,z_i) = \quad & \underset{x'\in\Gamma(x,z_i)}{argmax}\left\{u(c)+\beta\sum_{j=1}^{M}\pi_{i,j}v(x',z_j)\right\} \\
s.a. \quad & c+\sum_{j=1}^{N}x'^{j}p^{j}(z_i)=\sum_{j=1}^{N}x^{j}\left(p^{j}(z_i)+d^{j}(z_i)\right)
\end{aligned}
$$

y la value function v es solucion del problema recursivo para todo b y z;

2) Los mercados se limpian:

$$g^{j}(1,z)=1 \quad \forall z=z_1,...,z_M,\ j=1,...,N.$$

Bajo funciones de utilidad bien comportadas, la value function es diferenciable y la condicion de primer orden de cada consumidor en la asignacion de equilibrio es

$$p^{j}(z_i)u'\left(\sum_{j=1}^{N}d^{j}(z_i)\right)=\beta\sum_{k=1}^{M}\pi_{i,k}\left(p^{j}(z_k)+d^{j}(z_k)\right)u'\left(\sum_{j=1}^{N}d^{j}(z_k)\right) \quad \forall j=1,...,N$$

Lo anterior define $N\times M$ ecuaciones en $N\times M$ incognitas: $p^{j}(z_i)$.

En general, podemos escribir la determinacion de precios de un activo como

$$p(s)u'\left(c(s)\right)=\beta E_s\left[\left(p(s')+d(s')\right)u'\left(c(s')\right)\right]$$

Sea $m(s,s')=\frac{\beta u'(c(s'))}{u'(c(s))}$. $m(s,s')$ representa la valoracion del estado s' en el periodo siguiente cuando el estado corriente es s. Tambien se lo denomina factor de descuento estocastico.

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
p(s) &= E_s\left[\left(p(s')+d(s')\right)m(s,s')\right] \\
&= E_s\left[p(s')+d(s')\right]E_s m(s,s')+Cov_s\left[\left(p(s')+d(s')\right),m(s,s')\right] \\
&= \frac{E_s\left[p(s')+d(s')\right]}{1+r(s)}+Cov_s\left[p(s')+d(s'),m(s,s')\right]
\end{aligned}
$$

donde la ultima igualdad usa la propiedad que si los agentes pueden intercambiar un bono libre de riesgo ($d(s)=1\ \forall s$), el precio del bono ($q(s)$) debe satisfacer la condicion de primer orden

$$q(s) = \frac{1}{1+r(s)} = \frac{\beta E_s u'\left(c(s')\right)}{u'\left(c(s)\right)}$$

La ecuacion de determinacion de precios de equilibrio indica que el precio de un activo es igual al valor descontado de los retornos esperados para el siguiente periodo mas una compensacion por riesgo. Por ejemplo, si $Cov_s\left[p(s') + d(s'), m(s,s')\right] < 0$ el activo paga mas en los estados mas valorados por el consumidor (consumo es bajo) y por tanto no contribuye a disminuir la volatilidad de los consumos futuros. Los agentes van a estar dispuestos a tener esos activos en su portafolios a un precio mas bajo (retorno mas alto) que el implicado por los pagos esperados descontados del activo.

Metodo de Coleman

La aplicacion anterior ilustra que en algunos casos nos puede alcanzar con conocer la regla de consumo optimo, sin necesidad de calcular las value function. Coleman (Journal of Business & Economic Statistics, 1990) propone un metodo para encontrar una solucion basado unicamente en la ecuacion de Euler.

Coleman ejemplifica el metodo basado en el modelo de crecimiento neoclasico con incertidumbre y sin utilidad del ocio. Asumiendo que el equilibrio esta determinado como si existiese un agente representativo, la ecuacion de Euler del problema discretizado se puede escribir como

$$u'\left[zf(k) - g(k,z)\right] = \beta \sum_{i=1}^{M} Pr(z_i \mid z) u'\left[z_i f(g(k,z)) - g\left[g(k,z), z_i\right]\right] z_i f'(g(k,z))$$

para todo $k \in \mathcal{K} = (k_1, ..., k_N)$, $z \in \mathcal{Z} = (z_1, ..., z_N)$.

Para poder utilizar la condicion de primer orden, debemos asumir que u y f son diferenciables, $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$, y $f(0) = 0$. Las 2 ultimas condiciones garantizan que el consumidor representativo no quiera elegir la solucion de esquina $k' = 0$.

El procedimiento consiste en los siguientes pasos:

1) Definir una policy function inicial $g^0(k,z)$ para todo $k \in \mathcal{K}, z \in \mathcal{Z}$.

2) Para cada $n = 0, 1, ...$ y $k \in \mathcal{K}, z \in \mathcal{Z}$, resolver la siguiente ecuacion en x:

$$u'\left[zf(k) - x\right] = \beta \sum_{i=1}^{M} Pr(z_i \mid z) u'\left[z_i f(x) - g^n\left[x, z_i\right]\right] z_i f'(x), \tag{9.1}$$

que implica encontrar la decision de ahorro optimo en el periodo corriente para (k,z), dado que el agente sigue la regla de ahorro optimo $g^n(k,z)$ en el periodo siguiente. Este paso requiere definir algun procedimiento de interpolacion para evaluar $g^n(x,z)$ en valores de $x \notin \mathcal{K}$

Sea x^* la solucion de ecuacion (9.1). Definimos $g^{n+1}(k,z) = x^*$.

3) Continuamos con 2) hasta que $\|g^{n+1} - g^n\| \leq \epsilon$, donde ϵ denota el criterio de convergencia.

Aproximacion cuadratica lineal

Los metodos de resolucion que hemos visto se basan en la resolucion de la value function o de la policy function para valores de las variable de estado que se encuentran en una grilla. En base al valor de las funciones de interes en la grilla podemos aproximar las decisiones optimas para estados que no estan en la grilla.

Para un numero relativamente reducido de las variables de estado, podemos obtener aproximaciones precisas de las funciones de interes utilizando un numero suficientemente alto de puntos de grilla. Sin embargo, si quisieramos considerar problemas con un numero relativamente alto de variables de estado, enfrentariamos limitaciones computacionales. Un procedimiento de resolucion que permite resolver problemas con un numero arbitrariamente alto de variables de estado es de la aproximacion quadratica lineal (ver Dias-Jimenez y Ljungqvist & Sargent). Este procedimiento consiste basicamente en resolver el problema usando una funcion de retorno que cuadratica.

$$(Tv)(x,z) = \underset{y \in \Gamma(x,z)}{Max} \{F(x,z,y) + \beta E[v(y,z')|z]\}$$

donde $x, y \in X \subseteq \mathbf{R}^l,\ z \in \mathbf{R}^n$. La funcion de retorno esta configurada por la siguiente forma cuadratica con matriz Q semidefinida negativa.

$$F(x,z,y) = \begin{pmatrix} 1 & x^T & z^T & y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{x1}^T & Q_{z1}^T & Q_{y1}^T \\ Q_{x1} & Q_{xx} & Q_{zx}^T & Q_{yx}^T \\ Q_{z1} & Q_{zx} & Q_{zz} & Q_{yz}^T \\ Q_{y1} & Q_{yx} & Q_{yz} & Q_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

y con

$$z' = Lz + \varepsilon$$

con $E(\varepsilon) = 0$, $E(\varepsilon\varepsilon^T) = \Sigma$.

Asumir por el momento que la value function tambien consiste en una forma cuadratica con matriz P semidefinida negativa.

$$v(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & x^T & z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{x1}^T & P_{z1}^T \\ P_{x1} & P_{xx} & P_{zx}^T \\ P_{z1} & P_{zx} & P_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Eso implica que

$$
\begin{aligned}
E\left[v(y,z')|z\right] &= E\left[\begin{pmatrix} 1 & y^T & z^TL^T+\varepsilon^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{x1}^T & P_{z1}^T \\ P_{x1} & P_{xx} & P_{zx}^T \\ P_{z1} & P_{zx} & P_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ Lz+\varepsilon\end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & y^T & z^TL^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{x1}^T & P_{z1}^T \\ P_{x1} & P_{xx} & P_{zx}^T \\ P_{z1} & P_{zx} & P_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ Lz\end{pmatrix} + E\left[\varepsilon^T P_{zz}\varepsilon\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x,z,y)+\beta E\left[v(y,z')|z\right] &= x^TQ_{xx}x + z^TQ_{zz}z + y^TQ_{yy}y + 2z^TQ_{zx}x + 2y^TQ_{yx}x + 2y^TQ_{yz}z \\
&\quad + Q_{11}^2 + 2x^TQ_{x1} + 2z^TQ_{z1} + 2y^TQ_{y1} + \beta y^TP_{xx}y + \beta z^TL^TP_{zz}Lz \\
&\quad + 2\beta y^TP_{zx}^TLz + \beta E\left[\varepsilon^TP_{zz}\varepsilon\right] + P_{11}^2 + 2y^TP_{x1} + 2z^TP_{z1}
\end{aligned}
$$

La condicion de primer orden del problema es

$$2Q_{yy}y^* + 2Q_{yx}x + 2Q_{yz}z + 2Q_{y1} + 2P_{x1} + 2\beta P_{xx}y^* + 2\beta P_{zx}^TLz = 0$$

que implica

$$
\begin{aligned}
y^* &= -\left(Q_{yy}+\beta P_{xx}\right)^{-1}\left(Q_{yx}x + Q_{yz}z + \beta P_{zx}^TLz + Q_{y1} + P_{x1}\right) \\
&= -A_1 - A_xx - A_zz
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left(Q_{yy}+\beta P_{xx}\right)^{-1}\left(Q_{y1}+P_{x1}\right) \\
A_x &= \left(Q_{yy}+\beta P_{xx}\right)^{-1}Q_{yx} \\
A_z &= \left(Q_{yy}+\beta P_{xx}\right)^{-1}\left(Q_{yz}+\beta P_{zx}^TL\right)
\end{aligned}
$$

Notar que la decision optima sobre y no depende de los momentos de segundo orden de ε (eso es valido siempre que el problema sea cuadratico).

$$
\begin{aligned}
F(x,z,y^*)+\beta E\left[v(y^*,z')|z\right] &= Q_{11}^2 + x^TQ_{xx}x + z^TQ_{zz}z + 2z^TQ_{zx}x + \left(x^TA_x^T + z^TA_z^T\right)Q_{yy}(A_xx+A_zz) \\
&\quad -2\left(x^TA_x^T + z^TA_z^T\right)Q_{yx}x - 2\left(x^TA_x^T + z^TA_z^T\right)Q_{yz}z \\
&\quad +2x^TQ_{x1} + 2z^TQ_{z1} - 2A_1^TQ_{y1} - 2x^TA_x^TQ_{y1} - 2z^TA_z^TQ_{y1} \\
&\quad +\beta\left(x^TA_x^T + z^TA_z^T\right)P_{xx}(A_xx+A_zz) + \beta z^TL^TP_{zz}Lz \\
&\quad +\beta E\left[\varepsilon^TP_{zz}\varepsilon\right] - 2\beta\left(x^TA_x^T + z^TA_z^T\right)P_{zx}^TLz + \beta P_{11}^2 \\
&\quad -2\beta A_1^TP_{x1} - 2\beta x^TA_x^TP_{x1} - 2\beta z^TA_z^TP_{x1} + 2\beta z^TP_{z1}
\end{aligned}
$$

$$(Tv)(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & x^T & z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P'_{11} & P'^T_{x1} & P'^T_{z1} \\ P'_{x1} & P'_{xx} & P'^T_{zx} \\ P'_{z1} & P'_{zx} & P'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

donde

$$P'_{11} = \left(Q_{11}^2 - 2A_1^T Q_{y1} + \beta P_{11}^2 + \beta E\left[\varepsilon^T P_{zz}\varepsilon\right] - 2\beta A_1^T P_{x1}\right)^{1/2}$$

$$P'_{x1} = Q_{x1} - A_x^T Q_{y1} - \beta A_x^T P_{x1}$$

$$P'_{z1} = Q_{z1} - A_z^T Q_{y1} - \beta A_z^T P_{x1} + \beta P_{z1}$$

$$P'_{xx} = Q_{xx} + A_x^T Q_{yy} A_x - 2A_x^T Q_{yx} + \beta A_x^T P_{xx} A_x$$

$$P'_{zx} = Q_{zx} + (1/2)A_z^T Q_{yy} A_x - A_z^T Q_{yx} + (1/2)\beta A_z^T P_{xx} A_x - \beta L^T P_{zx} A_x$$

$$P_{zz} = Q_{zz} + A_z^T Q_{yy} A_z - 2A_z^T Q_{yz} + \beta A_z^T P_{yy} A_z + \beta L^T P_{zz} L - 2\beta A_z^T P_{zx}^T L$$

Lo anterior implica que el operador T mapea formas cuadraticas en formas cuadraticas. Dado que T es una contraccion y el espacio de formas cuadraticas es completo, el punto fijo v tambien es una forma cuadratica.

Las formas funcionales que habitualmente nos interesan no se pueden representar por formas cuadraticas ya que por ejemplo, pueden implicar que la funcion de retorno sea no monotonica (utilidad marginal negativa). Pero podemos tener una aproximacion local suficientemente buena de la funcion de retorno usando una aproximacion de Taylor de segundo orden.

Por ejemplo, para el caso del modelo neoclasico de crecimiento utilizado para ilustrar el metodo de Coleman, la funcion de retorno consiste en

$$F(k,z,k') = u\left(e^z f(k) + (1-\delta)k - k'\right)$$

Nos va a interesar tomar una aproximacion de Taylor de esa funcion pero el problema en una economia con incertidumbre es que tipicamente no existe un punto donde la economia converga, sino un conjunto ergodico en donde fluctua la variable de estado. Definimos por tanto el estado estacionario deterministico como el estado estacionario de una economia en la que el shock z es igual a la media de largo plazo de z en todos los periodos (en este caso igual a 0). Por lo tanto, el capital de estado estacionario satisface la ecuacion

$$\beta\left(e^{\bar{z}}f'(\bar{k})+1-\delta\right)=1$$

donde $\bar{z}=0$ y el consumo en el estado estacionario deterministico $\bar{c}=e^{\bar{z}}f(\bar{k})-\delta\bar{k}$.

$$F(k,z,k')\simeq u\left(\bar{c}\right)+\left(\begin{array}{ccc} k-\bar{k} & z-\bar{z} & k'-\bar{k}\end{array}\right)J_F+\frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} k-\bar{k} & z-\bar{z} & k'-\bar{k}\end{array}\right)H_F\left(\begin{array}{c} k-\bar{k}\\ z-\bar{z}\\ z-\bar{z}\end{array}\right),$$

con

$$J_F=\left(\begin{array}{c} u'.(f'+1-\delta)\\ u'f\\ -u'\end{array}\right)$$

y

$$H_F=\left(\begin{array}{ccc} u''.(f'+1-\delta)^2+u'e^{\bar{z}}f'' & u''.(f'+1-\delta)f+u'f' & -u''.(f'+1-\delta)\\ u''.(f'+1-\delta)f+u'f' & u''f^2+u'f^2 & -u''f\\ -u''.(f'+1-\delta) & -u''f & u''\end{array}\right).$$

Por tanto la funcion de retorno se puede approximar como una forma cuadratica.

Uso de modelos dinamicos para el estudio de fluctuaciones agregadas y de disenio de politica economica

El modelo asignado en el hw4 constituye la base del modelo de ciclo real (Real Business Cycle). En dicho modelo, las fluctuaciones de la economia estan originadas por shocks a la productividad y por tal motivo se denomina de 'ciclo real' (en contraposicion a fluctuacioes causadas por shocks monetarios). Cooley and Prescott (1995) presentan una descripcion detallada del modelo standard y de la utilidad de dicho modelo.

En el modelo canonico de ciclo real, se asume que no hay distorsiones de mercado y por tanto la asignacion de recursos es optima: las fluctuaciones agregadas son la reaccion optima a los shocks de productividad. En ese marco, cualquier politica que se implemente va a reducir el bienestar de los consumidores.

Varios autores han estudiado diversas extensiones del modelo canonico con el fin de mejorar la capacidad explicativa del modelo y de introducir un rol para politicas fiscal o monetarias.

En particular, en los ultimos anios han habido una gran cantidad de papers estudiando el disenio de politicas monetarias optimas. Vamos a analizar el modelo base para el estudio de politicas monetarias (tambien llamdado modelo neo-keynesiano). Empezaremos viendo el modelo clasico, donde no hay rol para la politica monetaria. La presentacion va a seguir Gali (2008): 'Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle'.

Clase 10

Modelo clasico

Existe una medida 1 de consumidores en la economia. El objetivo de cada consumidor es maximizar el siguiente flujo de utilidad esperada

$$E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t),$$

donde C_t denota la cantidad de bienes consumidas en t y N_t la cantidad de horas de trabajo ofrecidas (y trabajadas).

La restriccion presupuestal es

$$P_t C_t + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t N_t + T_t \quad \forall t,$$

donde B_t denota el numero de bonos (de un periodo) que el individuo tiene al comienzo del periodo t y Q_t el precio de esos bonos (en unidades de dinero). Cada bono paga una unidad de dinero en la fecha de vencimiento. T_t denota una transferencia monetaria de suma fija (por ejemplo, dividendos).

En esta economia el dinero cumple el rol de unidad de cuenta. Mide cuanto cuestan los bienes y horas de trabajo en unidades de dinero. Sin embargo, no existe ninguna razon fundamental para la presencia de dinero. De hecho, los agentes no incluyen sus saldos monetarios como argumento a maximizar ni el dinero entra en la restriccion presupuestal (no se utiliza dinero como reserva de valor).

La condiciones de primer orden de este problema son

$$\frac{W_t}{P_t} = -\frac{U_n(C_t, N_t)}{U_c(C_t, N_t)}. \tag{10.1}$$

$$U_c(C_t, N_t)\frac{Q_t}{P_t} = \beta E_t \left[U_c(C_{t+1}, N_{t+1}) \frac{1}{P_{t+1}} \right] \Rightarrow Q_t = \beta E_t \left[\frac{U_c(C_{t+1}, N_{t+1})}{U_c(C_t, N_t)} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right]. \tag{10.2}$$

Vamos a asumir la siguiente forma funcional para la funcion de utilidad

$$U(C, N) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N^{1+\varphi}}{1+\varphi}.$$

Las condiciones de primer orden se pueden reescribir como

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\varphi}. \tag{10.3}$$

$$Q_t = \beta E_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right]. \tag{10.4}$$

Es inmediato verificar que la condicion de primer orden (10.3) se puede escribir como

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t. \tag{10.5}$$

donde las variables en minuscula denotan el logaritmo natural de la variable.

La condicion de primer orden (10.4) se puede aproximar como

$$e^{logQ_t} = \beta E_t \left[e^{-\sigma log(C_{t+1}/C_t) + log(P_t/P_{t+1})} \right]$$

$$1 = e^{log\beta} E_t \left[e^{-\sigma \Delta c_{t+1} + p_t - p_{t+1} - q_t} \right] \tag{10.6}$$

Vamos a denotar la tasa de interes nominal como i_t. Por tanto

$$i_t \simeq log(1 + i_t) = log \left(\frac{1}{Q_t} \right) = -q_t.$$

La tasa de descuento la denotamos por $\rho = -log\beta$
La aproximacion anterior es valida para tasas de interes relativamente pequenias.
Sustituyendo en ecuacion (10.6)

$$1 = E_t \left[e^{-\rho - \sigma \Delta c_{t+1} + p_t - p_{t+1} + i_t} \right] \tag{10.7}$$

Vamos a tomar una aproximacion de Taylor de primer orden de (10.7) alrededor del estado estacionario deterministico, donde el consumo crece a una tasa constante (exogena) determinada por el crecimiento de la productividad y los precios tambien crecen a una tasa constante, que puede ser cero. La tasa de crecimiento de los precios en el estado estacionario depende del objetivo de inflacion del Banco Central.

La ecuacion de Euler en el estado estacionario deterministico implica que

$$i_t = \rho + \sigma\gamma + \pi_t$$

,

donde γ denota la tasa de crecimiento del consumo en el estado estacionario. La ecuaciona anterior implica que la tasa nominal de interes depende linealmente de la tasa de descuento, la tasa de crecimiento del consumo y la inflacion. Por ejemplo, una elasticidad de sustitucion intertemporal baja (σ alto) induce una tasa de interes nominal alta: los consumidores deben ser recompensados con una tasa de interes alta para inducir un sendero de consumo creciente.

Definimos la tasa real de interes como

$$r = i - \pi.$$

En equilibrio

$$r = \rho + \sigma\gamma.$$

Tomando una aproximacion lineal de Taylor de primer orden sobre $e^{-\rho-\sigma\Delta c_{t+1}+p_t-pt+1+i_t}$ en el estado estacionario obtenemos

$$e^{-\rho-\sigma\Delta c_{t+1}+p_t-p_{t+1}+i_t} \simeq 1 + (i_t - i) - (\pi_{t+1} - \pi) - \sigma(\Delta c_{t+1} - \gamma) = 1 + i_t - \pi_{t+1} - \sigma\Delta c_{t+1} - \rho$$

Usando la condicion de primer orden (10.7), obtenemos

$$1 = E_t[1 + i_t - \pi_{t+1} - \sigma\Delta c_{t+1} - \rho] = 1 + i_t - \rho - \sigma c_t + E_t[\sigma c_{t+1} - \pi_{t+1}]$$

que implica

$$c_t = E_t\left[c_{t+1}\right] - \frac{i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \rho}{\sigma} \tag{10.8}$$

Hay una medida 1 de firmas que utilizan una tecnologia lineal en horas de trabajo:

$$Y_t = A_t N_t^{1-\alpha}$$

El objetivo de cada firma es

$$\underset{N_t}{Max}\left\{P_t Y_t - W_t N_t\right\}.$$

La condiciond de primer orden es

$$\frac{W_t}{P_t} = (1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha},$$

que se puede reescribir como

$$w_t - p_t = log(1-\alpha) + a_t - \alpha n_t. \tag{10.9}$$

En equilibrio, la restriccion de recursos agregada implica que

$$c_t = y_t = a_t + (1-\alpha)n_t. \tag{10.10}$$

La equacion (10.10) conjuntamente con las condiciones de primer orden para los consumidores y firmas (10.5) y (10.9), implican

$$\begin{aligned}
\varphi n_t &= log(1-\alpha) + a_t - \alpha n_t - \sigma c_t \\
&= log(1-\alpha) + a_t - \alpha n_t - \sigma a_t - \sigma(1-\alpha)n_t,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow n_t = \frac{log(1-\alpha) + a_t(1-\sigma)}{\varphi + \alpha + \sigma(1-\alpha)} = \psi_{na} a_t + \vartheta_n \tag{10.11}$$

Usando ecuaciones (10.10) y (10.11)

$$y_t = a_t + (1-\alpha)\psi_{na} a_t + (1-\alpha)\vartheta_n = \psi_{ya} a_t + \vartheta_y \tag{10.12}$$

con $\psi_{ya} = \frac{1+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$ y $\vartheta_y = (1-\alpha)\vartheta_n$.

Definiendo la tasa real de interes esperada en t como $r_t = i_t - E_t[\pi_{t+1}]$, la ecuacion de euler (10.8) y la restriccion de recursos agregada (10.10) implican

$$0 = E_t\left[\Delta y_{t+1}\right] + \frac{i_t - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \rho}{\sigma} = \psi_{ya} E_t\left[\Delta a_{t+1}\right] + \frac{r_t - \rho}{\sigma}$$

$$\Rightarrow r_t = \rho + \sigma \psi_{ya} E_t\left[\Delta a_{t+1}\right] \tag{10.13}$$

Finalmente, el logaritmo del salario real $\omega_t = w_t - p_t$ cumple con

$$\omega_t = log(1-\alpha) + a_t - \alpha n_t = \psi_{\omega a} a_t + \vartheta_\omega, \tag{10.14}$$

con $\psi_{\omega a} = \frac{\sigma+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$ y $\vartheta_\omega = \frac{(\sigma(1-\alpha)+\varphi) log(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}$.

Notar que las ecuaciones (10.11)-(10.14) determinan la evolucion del empleo, ingreso, tasa real de interes y salario real como funcion del shock de productividad a_t. La evolucion de los precios no incide sobre las variables reales y por tanto en este contexto la politica monetaria no va a tener efectos reales (dicotomia clasica).

La evolucion de equilibrio de los precios va a estar determinada por la politica monetaria. A continuacion consideraremos diferentes reglas de politica monetaria. No hemos especificado ningun motivo por el cual los agentes demanden dinero. En particular, la economia anterior sin unidades fisicas de dinero circulando y por tanto el modelo no es util para estudiar las implicancias de la oferta de dinero (Gali considera un caso donde los agentes demandand dienro y se pueden estudiar politicas definidas sobre agregados monetarios). En cambio, el Banco Cental puede incidir en los precios al seguir una politica que fija la tasa nominal de interes.[2]

En esta economia, una regla de politica monetaria consiste en una funcion que determina la tasa de interes nominal como funcion de variables observables en t (las esperanzas sobre variables funciones son variable observables en t). Las reglas que consideraremos son arbitrarias y asumimos que el Banco Central sigue esa regla en todo periodo y estado.

[2]El interes por reglas de politica monetaria definidas sobre la tasa nominal de interes se debe, en parte, a que en las ultimas decadas los Bancos Centrales han abandonado politicas explicita de control de agregados monetarios debido a que la "inestable" demanda real por saldos monetarios.

Los precios, y por tanto la inflacion, van a estar determinados por la ecuacion de Fisher

$$i_t = r_t + E_t[\pi_{t+1}]. \tag{10.15}$$

La ecuacion de Fisher se desprende de la definicion anterior de la tasa real de interes r y no se desprende de ninguna condicion de arbitrage (optimalidad) dado que los agentes solo pueden hacer uso de un activo para transferir recursos de un periodo a otro.[3]

Politica I: i_t sigue un proceso estacionario exogeno con media ρ.

En este caso el Banco Central fija la tasa de interes nominal igual a la tasa de interes que se observaria en el estado estacionario con inflacion 0 (ρ) mas un shock.

La ecuacion de Fisher implica

$$E_t[\pi_{t+1}] = i_t - r_t$$

[3]Sea el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias estocasticas

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ E_t P_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_t \\ P_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_t \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

El shock μ_t cumple con la propiedad que para todo t existen $\bar{\mu}_t$ y θ_t reales para los cuales

$$-(1+i)^{\theta_t} \leq E_t \mu_{t+i} \leq (1+i)^{\theta_t} \text{ para todo } i.$$

Esta condicion descarta, por ejemplo, que las medias futuras de μ crezcan a un ritmo exponencial.

Se dice que una variable Z esta predeterminada cuando $Z_{t+1} = E_t Z_{t+1}$ (por ejemplo el capital acumulado en t determina el capital inicial en $t+1$ independientemente de los shocks que se materialicen en $t+1$).

En este ejemplo la variable X es predeterminada y la variable P es no predeterminada.

Blanchard y Kahn (1980) consideran un sistema como el anterior y se enfocan en encontrar equilibrios "no explosivos", es decir senderos (estocasticos) para X y P tales que para todo t existen $\bar{X}_t, \bar{P}_t$ y σ_t reales para los cuales

$$-(1+i)^{\sigma_t} \begin{pmatrix} \bar{X}_t \\ \bar{P}_t \end{pmatrix} \leq E_t \begin{pmatrix} X_{t+i} \\ P_{t+i} \end{pmatrix} \leq (1+i)^{\sigma_t} \begin{pmatrix} \bar{X}_t \\ \bar{P}_t \end{pmatrix} \text{ para todo } i.$$

Blanchard y Kahn (1980) prueban que cuando el numero de valores propios fuera del circulo unitario (mayor a 1 cuando para el caso en que sean reales) de la matriz A es igual al numero de variables no predeterminadas, entonces el sistema anterior tiene un unico equilibrio (no explosivo). Si los 2 valores propios estan fuera del circulo unitario, no hay solucion no explosiva. Si los 2 valores propios estan dentro del circulo unitario, hay una infinidad de soluciones no-explosivas.

Se puede verificar que los 2 valores propios de la matriz A son $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$. Por tanto, en el ejemplo anterior existe un unico equilibrio estacionario solo si a o b son mayores a 1.

Es decir, la inflacion esperada en $t+1$ se determina de acuerdo a la realizacion de i_t, pero los precios no estan determinados. De hecho cualquier proceso para p_{t+1} que satisfaga

$$p_{t+1} = p_t + i_t - r_t + \xi_{t+1},$$

con ξ_{t+1} una secuencia arbitraria de shocks con $E_t[\xi_{t+1}] = 0$ para todo t es un equilibrio. Se dice que en este caso el nivel de precios de la economia esta indeterminado.

El ejemplo muestra como una regla monetaria que determina la tasa de interes nominal exogenamente lleva a la indeterminacion del nivel de precios.

Politica II: El Banco Central sigue la regla

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t, \quad \text{con } \phi_\pi \geq 0$$

que implica que el Banco Central ajusta la tasa de interes nominal de acuerdo a la realizacion de inflacion que se observo en el periodo corriente.

Conjuntamente con la ecuacion de Fisher, esa regla implica

$$\phi_\pi \pi_t = i_t - r_t + r_t - \rho = E_t[\pi_{t+1}] + \hat{r}_t \tag{10.16}$$

Para $\phi_\pi > 1$ la ecuacion (10.16) tiene una unica solucion estacionaria (alrededor del estado estacionario deterministico), que se puede encontrar sustituyendo suscesivamente $E_t(\hat{r}_{t+s}$ en las esperanzas $E_t[\pi_{t+s}]$. La solucion es:

$$\pi_t = \sum_{t=0}^{\infty} \phi_\pi^{-(k+1)} E_t[\hat{r}_{t+k}]$$

La ecuacion anterior determina la inflacion en t y por tanto el nivel de precios en t.[4]

Por ejemplo, si a_t sigue el proceso de Markov

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a$$

[4]Para asistir a la intuicion pensar en un problema donde no existe incertidumbre y $\hat{r}_t = \bar{r}$ para todo t. En este caso, la ecuacion (10.16) implica

$$\phi_\pi \pi_t = \pi_{t+1} + \bar{r}$$

Eso implica que

$$\pi_{t+s} = \left(\pi_t - \frac{\bar{r}}{\phi_\pi - 1}\right)\phi_\pi^s + \frac{\bar{r}}{\phi_\pi - 1} \quad \forall s \geq 0.$$

Cuando $\phi_\pi > 1$, la unica solucion no explosiva corresponde al caso en que la inflacion toma un valor igual al equilibrio estacionario, lo que determina la inflacion en t. Si $\phi_\pi \leq 1$, cualquier valor de π_t genera trayectorias no-explosivas y por tanto π_t esta indeterminado.

con $\rho_a \in [0, 1)$. En ese caso la ecuacion (10.13) implica

$$\hat{r}_t = -\sigma\psi_{ya}(1 - \rho_a)a_t$$

y por tanto

$$\pi_t = -\frac{\sigma\psi_{ya}(1 - \rho_a)}{\phi_\pi - \rho_a}a_t$$

En este caso, la inflacion sigue un proceso estocastico proporcional al shock de productividad a_t. Notar que con esta regla el Banco Central puede reducir la volatilidad de la inflacion al elegir ϕ_π mas alto. En este marco no hay ninguna razon fundamental por la cual deberiamos descartar soluciones explosivas. Incluso, en algunos modelos las soluciones explosivas implicadas por el modelo linealizado en realidad convergen a otro estado estacionario y podriamos estar eliminando equilibrios que podrian ser de interes (ver Wolman 2011).

Para $\phi_\pi \leq 1$, la solucion estacionaria de (10.16) consiste en

$$\pi_{t+1} = \phi_\pi \pi_t - \hat{r}_t + \xi_{t+1}$$

donde ξ_{t+1} es una secuencia arbitraria de shocks con $E_t[\xi_{t+1}] = 0$.

Cualquier proceso de inflacion que satisfaga la ecuacion anterior es un equilibrio. Por tanto, la inflacion y el nivel de precios en t estan indeterminados.

La condicion $\phi_\pi > 1$ para obtener determinacion de precios en equilibrio se denomina principio de Taylor.

En esta economia, la asignacion de recursos no depende de la politica monetaria, ya que por lo explicado anteriormente, la politica monetaria solo afecta la trayectoria del nivel de precios

Modelo Neo Keynesiano

En esta seccion veremos el modelo canonico que se utiliza para estudiar politicas monetarias optimas. El modelo incorpora ineficiencias en la determinacion de los precios y por tanto, un rol para la politica monetaria.

El problema de cada consumidor es analogo al problema del consumidor presentado en la economia clasica. El consumidor busca maximizar

$$E\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(C_t, N_t).$$

La diferencia radica en que existen multiples bienes de consumo y C_t denota un indice de consumo. Se asume que existe una medida 1 de bienes de consumo y C_t depende de los consumos individuales de cada bien:

$$C_t = \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

con $C_t(i)$ denotando la cantdad del bien de consumo i consumida en t. La anterior especificacion implica una elasticidad de sustitucion constante e igual a ε (un aumento de 1% en el precio relativo $P(i)/P(j)$ reduce en ε % el ratio de consumos $C(i)/C(j)$ para todo $i, j \in [0, 1]$.

La restriccion presupuestaria es

$$\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di + Q_t B_{t+1} = B_t + W_t N_t + T_t \quad \forall t,$$

Ademas de la asignacion intertemporal de consumos y horas de trabajo, en este problema los consumidores deben decidir cuanto consumir de cada bien i. Eso implica resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} & \max_{C(i)} \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\ \text{s. a.} \quad & \int_0^1 P_t(i)C_t(i)di = A. \end{aligned}$$

Se puede mostrar que la solucion de ese problema consiste en

$$C_t(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t} \right)^{-\varepsilon} C_t \tag{10.17}$$

donde $P_t(i)$ denota el precio en t del bien de consumo i y $P_t = \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ denota el indice de precios de consumo [5]

Se puede verificar que las definiciones anteriores de P_t y C_t implican que

[5] Sea $C_i^*(i)$ la asignacion de consumos optimas del problema anterior. Eso implica que

$$\left(\int_0^1 C_t^*(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \leq \left(\int_0^1 (C_t^*(i) + \alpha x(i))^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

para toda funcion continua $x(i)$ con

$$\int_0^1 P_t(i)x(i)di = 0 \text{ y}$$

para todo $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di = P_tC_t$$

por lo que podemos escribir la restriccion presupuestal en t de forma identica a como la escribimos en la economia Clasica

$$P_tC_t + Q_tB_{t+1} = B_t + W_tN_t + T_t \quad \forall t,$$

por lo que las condiciones de primer orden (10.5) y (10.8) tambien se aplican a este caso.

Hay un continuo de firmas en el intervalo $[0, 1]$. Cada firma tiene el monopolio de produccion sobre el bien i. Todas las firmas usan la misma tecnologia con funcion de produccion

$$Y_t(i) = A_tN_t(i)^{1-\alpha},$$

donde el nivel de productividad A_t es comun a todas las firmas. La funcion de demanda que enfrenta cada firma esta dada por (10.17).

La friccion que se introduce en esta economia es que los precios $P_t(i)$ no se ajustan todos los periodos. Al comienzo de cada periodo, cada firma es informada si puede ajustar su precio o no. Si no puede ajustar su precio, debe vender todo lo que le demanden al precio vigente en el periodo anterior. La probabilidad con que una firma puede modificar su precio en el periodo es $1 - \theta$, independientemente de cuando haya sido la ultima vez que

---

Sea el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left(\int_0^1 (C_t^*(i) + \alpha x(i))^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} + \lambda \int_0^1 P_t(i)\alpha x(i)di = 0$$

Para que $C_t^*(i)$ se optimo debe cumplirse que $d\mathcal{L}/d\alpha|_{\alpha=0} = 0$ independientemente de la funcion $x(i)$ Esto ultimo implica que

$$\left(\int_0^1 C_t^*(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \int_0^1 C_t^*(i)^{-\frac{1}{\varepsilon}} x(i)di - \lambda \int_0^1 P_t(i)x(i)di = 0$$

Dado que $x(i)$ es arbitraria, en el optimo se debe cumplir que

$$\left(\int_0^1 C_t^*(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} C_t^*(i)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \lambda P_t(i) \quad \forall i \in [0, 1]$$

que implica

$$C_t^*(i) = \lambda^{-\varepsilon} \frac{P_t(i)^{-\varepsilon}}{\left(\int_0^1 C_t^*(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} = \lambda^{-\varepsilon} P_t(i)^{-\varepsilon} C_t$$

con
$\lambda = \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di C_t/A\right)^{1/\varepsilon}$.

modifico su precio. Este supuesto esta basado en Calvo (1983) y tiene la ventaja que significa significativamente el estudio de las distorsiones causada por la inflacion.

Cuando la firma i tiene la oportunidad de fijar el precio, maximiza el flujo esperado de dividendos descontados que planea recibir mientras el precio que fijo en t se mantenga vigente. Es decir,

$$\underset{P^*(i)}{Max} E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \frac{\beta^k U_c(C_{t+k}, N_{t+k}) P_t}{U_c(C_t, N_t) P_{t+k}} \left[P^*(i) D_{t+k}(P^*(i)) - \Psi_{t+k}\left(D_{t+k}(P^*(i))\right) \right] \right\},$$

donde $D_{t+k}(P^*(i)) = \left(\frac{P_t^*(i)}{P_{t+k}}\right)^{-\varepsilon} C_{t+k}$ denota la demanda que enfrenta la firma i en $t+k$ y $\Psi_{t+k}(Y)$ denota el costo nominal de producir Y unidades del bien i en $t+k$. El termino $\frac{\beta^k U_c(C_{t+k}, N_{t+k})}{U_c(C_t, N_t)}$ denota el factor de descuento estocastico. Dado que los consumidores son los duenios de las firmas, los flujos de fondos que genere la firma van a ser descontados a la tasa (estocastica) con que los consumidores valoras pagos futuros.

Dado que la firma necesita contratar $(Y(i)/A)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ horas de trabajo para ofrecer $Y(i)$ bienes i, $\Psi\left(Y(i)\right) = W_t (Y(i)/A)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

La condicion de primer orden del problema es

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k m_{t,t+k} \left[D_{t+k}(P^*(i)) + P^*(i) \frac{-\varepsilon D_{t+k}(P^*(i))}{P^*(i)} - \psi_{t+k} \frac{-\varepsilon D_{t+k}(P^*(i))}{P^*(i)} \right] \right\} = 0$$

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k m_{t,t+k} D_{t+k}(P^*(i)) \left[1 - \varepsilon - \psi_{t+k}(-\varepsilon) \frac{1}{P^*(i)} \right] \right\} = 0$$

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k m_{t,t+k} D_{t+k}(P^*(i)) \left[P^*(i) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \psi_{t+k} \right] \right\} = 0$$

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k m_{t,t+k} D_{t+k}(P^*(i)) \left[P^*(i) - \mathcal{M} \psi_{t+k} \right] \right\} = 0$$

donde $m_{t,t+k} = \frac{\beta^k U_c(C_{t+k}, N_{t+k}) P_t}{U_c(C_t, N_t) P_{t+k}}$ y $\psi_{t+k} = \Psi'_{t+k}(Y(i))$.

Si las firmas pudiesen ajustar sus precios en todos los periodos, la condicion de primer orden seria

$$P^*(i) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \psi_t,$$

por lo que el precio se igualaria al costo marginal por un mark-up. Por tanto, el termino $\mathcal{M}$ denota el mark-up que se observaria en el caso de precios flexibles. Por ejemplo, cuanto mayor sea ε mayor es la elasticidad de sustitucion entre bienes y por tanto menor el poder de mercado de las firmas y menor el mark-up que cargan a sus consumidores.

Notar que en el problema de las firmas (con precios inflexibles) el problema que enfrenta la firma i es identico al problema que enfrenta la firma j: ambas descuentan los flujos futuros a la misma tasa, usan la misma tecnologia para producir, y perciben la misma funcion de demanda por los bienes que producen. Por tanto, todas las firmas que ajusten sus precios en t van a elegir el mismo P^*.

Tomando una aproximacion de Taylor de la condicion de primer orden de las firmas alrededor del estado estacionario con inflacion cero y sin crecimiento del consumo (la productidad agregada no crece), se obtiene la siguiente expresion:

$$p_t^* - p_{t-1} = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[\hat{mc}_{t+k} + p_{t+k} - p_{t-1} \right], \tag{10.18}$$

donde $\hat{mc}_{t+k}$ es la diferencia entre el logaritmo del costo marginal real en $t+k$ y el costo marginal en el estado estacionario. La ecuacion anterior indica que el precio de las firmas que ajustan es mayor cuanto mayor sea el valor esperado desctontado de los costos marginales reales y precios agregados futuros.

Notar que esta economia existe heterogeneidad en las firmas dependiendo de cuando fue la ultima vez que la firma actualizo su precio.

Dado que todas las firmas eligen el mismo precio cuando ajustan, se puede probar que el logaritmo de la inflacion satisface

$$\pi_t = (1 - \theta)(p_t^* - p_{t-1}) \tag{10.19}$$

.

La inflacion en el periodo t depende de cuantas firmas ajustan sus precios $(1 - \theta)$ y de la magnitud del ajuste.

La ecuacion (10.18) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
p_t^* - p_{t-1} &= (1 - \beta\theta)\hat{mc}_t + p_t - p_{t-1} + (1 - \beta\theta) \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[\hat{mc}_{t+k} + p_{t+k} - p_t \right] \\
&= (1 - \beta\theta)\hat{mc}_t + \pi_t + (1 - \beta\theta)\beta\theta E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_{t+1} \left[\hat{mc}_{t+1+k} + p_{t+1+k} - p_t \right] \\
&= (1 - \beta\theta)\Theta\hat{mc}_t + \pi_t + \beta\theta E_t \left[p_{t+1}^* - p_t \right]
\end{aligned}$$

que junto con la ecuacion (10.19), las condicion de primer orden de las firmas y el equilibrio en el mercado de horas de trabajo implica

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \lambda \hat{mc}_t \tag{10.20}$$

donde λ es un coeficiente que depende de los parametros del modelo. La ecuacion (10.20) refleja las las decisiones de las firmas usando una formulacion recursiva. Por ejemplo, una mayor inflacion esperada para $t + 1$ es consecuencia que las firmas que ajusten en $t + 1$ esperan enfrentar costos marginales futuros mas altos que los que enfrentaron las firmas en el pasado (y derivaron en p_t). Eso implica que a mayor inflacion esperada para $t+1$ (mayor ajuste de precios de las firmas que ajustaran en $t + 1$) mayor sera el ajuste de las firmas que ajustan en t, dado que dichas firmas tambien esperan enfrentar una secuencia de costos marginales mas altos que en el pasado.

Sea y^n el logaritmo del ingreso natural o ingreso que se observaria en la economia con precios flexibles y sea $\tilde{y} = y - y^n$ el output gap: la diferencia entre el ingreso en la economia con distorsiones y el ingreso natural.

La ecuacion (10.20) se puede escribir como

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \kappa \tilde{y}_t \tag{10.21}$$

La ecuacion anterior se suele denominar como curva de Phillips Neo Keynesiana. Indica que cuanto mayor sea el ingreso corriente (que implica un mayor costo marginal), mayor sera la inflacion corriente.

La ecuacion de Euler (10.8) junto con el equilibrio en el mercado de bienes ($c_t = y_t$) implica

$$\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t[\pi_{t+1}] - r_t^n\right) + E_t[\tilde{y}_{t+1}] \tag{10.22}$$

donde la tasa de interes natural se define como

$$r_t^n = \rho + \sigma E_t \Delta y_{t+1}^n$$

e indica la tasa de interes real que se observaria en una economia con precios flexibles. La ecuacion (10.22) indica que una mayor inflacion esperada aumenta el nivel de ingreso corriente.

Las ecuaciones (10.21) - (10.22) determinan la evolucion conjunta del ingreso y la inflacion dada la tasa de interes nominal. Notar que en esta economia la inflacion y el ingreso se determinan conjuntamente y por tanto la politca monetaria no va a ser neutra.

Fuentes de infeficiencia en la economia

El problema de un planificador que asigna las mismas ponderaciones a todos los individuos consiste en

$$\underset{C_t(i),N_t(i)}{Max} U(C_t, N_t)$$

sujeto a

$$C_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha}$$

$$N_t = \int_0^1 N_t(i)di$$

Las condiciones de optimo son

$$\begin{aligned} C_t(i) &= C_t \quad \forall i \in [0,1] \\ N_t(i) &= N_t \quad \forall i \in [0,1] \\ -\frac{U_n, t}{U_c, t} &= (1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha} \end{aligned}$$

Dados que los bienes entran en la funcion de utilidad de la misma manera y las firmas emplean la misma tecnologia para producirlos, lo optimo es asignar las horas de trabajo uniformemente en los distintos sectores e igualar la productividad marginal de cada firma a la tasa de sustitucion entre horas de trabajo y consumo de los consumidores.

En la economia con precios inflexibles analizada anteriormente existen 3 fuentes de distorsiones

1) El poder monopolico de las firmas lleva a que

$$-\frac{U_n, t}{U_c, t} = \frac{W_t}{P_t} = \frac{(1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}}{\mathcal{M}} < (1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}.$$

Las firmas producen menos bienes y la productividad marginal del trabjo es mayor a la tasa marginal de sustitucion entre horas y bienes de consumo. Esta distorsion se podria corregir con un subsidio constante a la demanda por cada bien de consumo.

2) El mark-up promedio de las firmas varia con los shocks que enfrenta la economia y por tanto puede introducir fluctuaciones en el consumo y horas de trabajo ineficientes

3) La heterogeneidad en los precios de las firmas deriva a que $C_t(i) \neq C_t(j)$ para cualesquiera firmas i, j que no ajustaron sus precios en el mismo periodo.

En la presencia del subsidio que corrige la ineficiencia causada por el poder monopolico, la politica monetaria podria implementar la asignacion de recursos eficiente si lograra estabilizar la inflacion en cero.

Politica monetaria

Varias reglas pueden implementar la politica monetaria optima. Sin embargo esas reglas dependen de que el Banco Central observe la tasa de interes natural o el ingreso natural en cada periodo. En la practica, esas variables no son observables y por tanto se suele estudiar las implicancias de politicas monetarias que usan reglas simples que dependen de variables observables en t, y se compara la asignacion de recursos implicadas por esas reglas simples con la asignacion de recursos optima.

Considerese la siguiente regla de politica monetaria

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{y}_t$$

donde $\hat{y}_t$ denota la diferencia entre el ingreso corriente y el ingreso en el estado estacionario (el ingreso de largo plazo). La regla anterior implica que

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t + \upsilon_t$$

donde $\upsilon_t = \phi_y y_t^n$ denota el margen de error introducido por la regla anterior (el Banco Central no observa el producto natural).

Esa regla de politica, conjuntamente con las ecuaciones (10.21)-(10.22) implican que la dinamica del ingreso e inflacion estan dadas por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias estocastico

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + B(\hat{r}_t^n - \upsilon_t)$$

con

$$A = \frac{1}{\sigma + \varphi_y + \kappa \varphi_\pi} \begin{pmatrix} \sigma & 1 - \beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa + \beta(\sigma + \phi_y) \end{pmatrix}$$

Para que los valores de ingreso e inflacion en t esten determinados (existe un unico equilibrio estacionario) los valores propios de A deben estar dentro del circulo unitario (los valores propios de A^-1 fuera del circulo unitario). Eso se cumple si

$$\kappa(\phi_\pi - 1) + (1 - \beta)\phi_y > 0 \tag{10.23}$$

Eso implica que para que los valores de inflacion e ingreso esten determinados en equilibrio, el Banco Central debe imponer una regla de politica monetaria que reacciona con suficiente intensidad a la inflacion y a los desvios del ingreso con respecto al ingreso de largo plazo. Cuanto mas severamente reaccione con respecto al output gap, menor sera la intensidad con que debera actuar respecto a la inflacion.