Universidad de la República
Facultad de Ciencias Sociales
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Notas Docentes

Matemática Aplicada a la Economía.
Material de Consulta y Casos Prácticos

David Glejberman

Nota Docente No. 20

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

MATERIAL DE CONSULTA Y CASOS PRÁCTICOS

CURSO 2005

PARTE I

Profesor: David Glejberman

INTRODUCCIÓN

Las notas que siguen han sido preparadas para el Profesor de Matemática Aplicada a la Economía[1] para ser utilizadas por los cursillistas como material de consulta alternativo de los textos recomendados en la bibliografía. Estas notas difieren del contenido de los clásicos textos de Matemática porque no se ocupan los fundamentos de la ciencia ni de su construcción mediante métodos lógico-deductivos. Como el curso es de matemática aplicada, el mismo no se ocupa de demostrar propiedades y teoremas, sino de aplicar estos resultados para la resolución de problemas relevantes de la ciencia económica.

Con ese objeto en estas notas se repasan diversos capítulos del análisis y del álgebra que los cursillistas conocieron en la enseñanza media y en las carreras universitarias de grado. Se hace especial hincapié en el álgebra matricial, el estudio de funciones, la interpretación de la de la derivada, el cálculo integral, las funciones de varias variables y los métodos de optimización.

Entre las aplicaciones a la Economía que se presentan en el curso cabe mencionar la matriz de insumo-producto, la determinación del valor de las cuotas para cancelar una deuda pactada a interés compuesto, la elasticidad de la demanda, la clasificación de productos como complementarios o competitivos, la asignación óptima del presupuesto entre los factores de la producción, la minimización del costo de producción, la maximización de la utilidad sujeta a restricciones presupuestarias, entre otras.

Los ejercicios y casos prácticos han sido seleccionados de forma de contemplar todos los temas del programa; se han depurado en ocasión de los sucesivos cursos y complementado con los ejercicios propuestos en las últimas pruebas de examen. Estos casos prácticos tienen el propósito de mostrar las aplicaciones a la Economía así como ejercitar a los cursillistas en el uso de los conceptos del álgebra y el análisis y sus reglas operatorias.

De esta forma se espera que los alumnos adquieran familiaridad con el instrumental matemático para lograr un buen aprovechamiento en las siguientes asignaturas del Diploma, y eventualmente de la Maestría, tales como Micro y Macroeconomía, Estadística y Econometría.

[1] Matemática Aplicada a la Economía es una asignatura del curso de posgrado Diploma en Economía organizado por el Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República.

PROGRAMA DEL CURSO

1. Teoría de conjuntos.
2. Relaciones y funciones.
3. Conjuntos numéricos. Operaciones con números y sus propiedades.
4. Polinomios y expresiones algebraicas.
5. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones lineales.
6. Inecuaciones.
7. Matrices y determinantes.
8. Espacios vectoriales.
9. Valores y vectores propios. Diagonalización.
10. Funciones de una variable. Gráficas de funciones elementales.
    Operaciones con funciones. Función inversa y función compuesta.
11. Límites y continuidad de funciones.
12. Derivación y diferenciación. Interpretación geométrica de la derivada.
    Representación gráfica de funciones. Monotonía, extremos y concavidades.
13. Elasticidad.
14. Primitivas. Integrales indefinidas.
15. Integrales definidas. Integrales impropias.
16. Funciones de varias variables. Gráfico. Límites, continuidad.
17. Derivadas parciales, diferenciación, vector gradiente.
18. Elasticidad parcial.
19. Conjuntos convexos. Funciones convexas.
20. Extremos en funciones de varias variables.
21. Optimización con restricciones: Lagrange, Kuhn-Tucker.
22. Integrales definidas múltiples.

BIBLIOGRAFÍA

- Repartidos teóricos y prácticos del Profesor del curso.
- "Matemática para el Análisis Económico" – SYDSAETER y HAMMOND
- "Métodos fundamentales de economía matemática" – CHIANG
- "Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida"
  HAEUSSLER & PAUL (Prentice Hall)
- "Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales"
  BUDNICK, Frank (Mc Graw Hill)

1. TEORÍA DE CONJUNTOS

Los conceptos de ***conjunto*** y ***elemento*** de un conjunto pueden aceptarse como *primitivos*, en el sentido que no requieren de una definición precisa para manejarlos y operar con ellos. Conviene sí recordar algunas ideas sobre los conjuntos.

- Un conjunto queda bien definido cuando se conoce cuáles elementos le pertenecen. La noción de ***pertenencia*** también es *primitiva*.
- Los elementos de un conjunto pueden ser muy diversos y no necesariamente han de tener características comunes, como intuitivamente puede pensarse. Sin embargo, es frecuente que las ciencias se refieran a conjuntos de elementos con características comunes: la Sociología refiere a conjuntos humanos organizados en sociedad, la Botánica trabaja con conjuntos de plantas, la Psicología con individuos o pequeños grupos humanos y la Estadística estudia las características de ciertas poblaciones o ***universos*** que no son otra cosa que conjuntos de elementos que poseen una o más características medibles. En Matemática, los elementos que conforman un conjunto no tienen por qué tener características comunes. Un conjunto puede estar formado por los siguientes tres elementos: mi reloj, mi nombre y el pizarrón del salón de clase. Obsérvese que el conjunto queda bien definido al mencionar todos los elementos que lo componen. Pero los conjuntos más interesantes –sobre todo desde el punto de vista estadístico– son los que permiten encontrar relaciones entre sus elementos, formando clases o subconjuntos.
- En Matemática los conjuntos no tienen elementos repetidos. Esta aclaración es relevante porque en Estadística los conjuntos pueden contener elementos repetidos.
- En Matemática el orden de los elementos de un conjunto es irrelevante. Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces ambos conjuntos son iguales, sin importar el orden en que se presentan sus elementos.
- En la historia de la Matemática, la formalización de la teoría de conjuntos es muy posterior en el tiempo a la formalización del concepto de número. La teoría de conjuntos es de fines del siglo XIX y su principal exponente fue el alemán J. Cantor[2]. La teoría de números fue desarrollada por varias de las antiguas culturas (griega, china, maya, egipcia) algunos siglos antes de Cristo.
- El pastor de ovejas en la Grecia antigua no sabe contar, pero cada vez que saca las ovejas del corral para llevarlas a pastar, coloca una piedra en su morral. Cuando vuelve con las ovejas, por cada una que ingresa al corral el pastor tira una piedra. Así, si en el morral quedan piedras, sabe que se le han perdido ovejas. El pastor establece una relación biunívoca entre dos conjuntos, piedras y ovejas, para resolver su problema de conteo. ¡Y no sabe contar, pues no conoce los números!

Los conjuntos suelen denominarse en Matemática mediante las letras de nuestro alfabeto, en mayúscula: A, B, C, etc. Los elementos se simbolizan con las mismas letras, pero en minúscula. El símbolo $\in$ indica pertenencia. Así, “$a \in C$” indica que el elemento “a” *pertenece* al conjunto C, mientras que la expresión “$b \notin A$” indica que el elemento “b” *no pertenece* al conjunto A.

Se denomina *conjunto vacío* a un conjunto que no tiene elementos, y se lo simboliza con la letra mayúscula griega ϕ.

---

[2] George Cantor nació en San Petersburgo en 1845 y falleció en 1918 internado en un manicomio. Se cree que enloqueció tratando de resolver una falla en la teoría de conjuntos que descubrió Bertrand Russell. La falla se conoce hoy como “paradoja de Bertrand Russell” y fue precisamente este filósofo y matemático británico (1872-1970) quien posteriormente resolvió la falla.

Existen diversas formas de representar los conjuntos: mediante texto y mediante gráficas. Cuando se pueden enumerar uno a uno todos los elementos del conjunto, porque se trata de un conjunto finito (y con pocos elementos), los elementos se separan con comas dentro de un par de llaves.

Ejemplo: el conjunto de los resultados posibles de una tirada de un dado es:

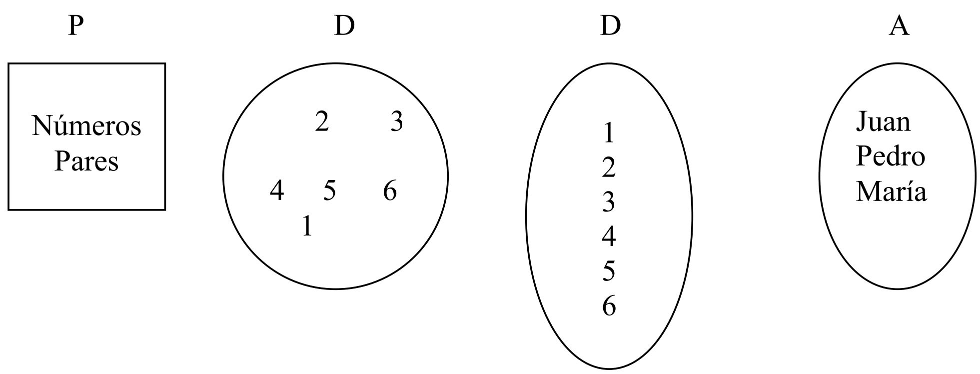
$$D = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Esta forma de presentación textual del conjunto se denomina “por extensión”. Otra forma textual consiste en dar una regla que establezca qué elementos pertenecen al conjunto (y cuáles no). Siguiendo con el ejemplo del dado, el conjunto de los resultados posibles es una parte de los números naturales (N): los naturales comprendidos entre 1 y 6. La notación “por comprensión” sería:

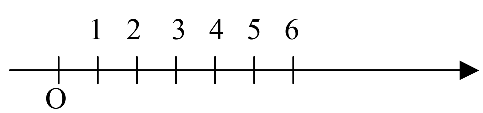
$$D = \{x : x \in N,\ 1 \leq x \leq 6\}$$

que se lee así: “D es el conjunto de números x que cumplen con dos condiciones, x es un número natural y x está comprendido entre 1 y 6”.

La forma gráfica más usual para representar un conjunto es el *diagrama de Venn*. Consiste en dibujar dentro de un rectángulo, un círculo o de un óvalo todos los elementos del conjunto.



Cuando se trabaja con conjuntos de números, resulta muy útil la representación gráfica mediante una recta en la que se establece un origen (O) y un sentido (→), el sentido en el que crecen los números.



Los elementos de un conjunto pueden ser personas, nombres, números y también conjuntos. Por ejemplo, sea el conjunto A formado por tres elementos: a, b, c.

$$A = \{a,b,c\}$$

Consideremos ahora el "conjunto de las partes del conjunto A".

$$\mathbb{P}_A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\},\{a,b\}, \{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Por convención, el conjunto vacío es "parte" de cualquier conjunto. ¿Qué propiedades tienen los elementos del conjunto $\mathbb{P}_A$? En primer lugar, estos elementos son a su vez conjuntos, y en segundo lugar, están incluidos o son una parte (en sentido amplio) del conjunto A. La notación para la *inclusión* es el símbolo $\subseteq$ ("inclusión en sentido amplio", implica que eventualmente los dos conjuntos pueden ser iguales). La inclusión relaciona dos conjuntos, mientras que la pertenencia relaciona un elemento con un conjunto.

En relación con el ejemplo anterior, la notación apropiada sería:

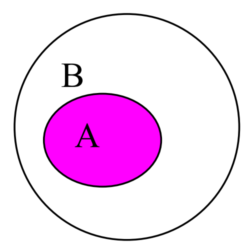
$$\{a,b\} \subseteq A$$
$$\{a\} \in \mathbb{P}_A$$
$$A \in \mathbb{P}_A$$
$$\{a\} \notin A$$

La noción de "conjunto de conjuntos" es muy utilizada en Estadística. Por ejemplo, cuando se quiere seleccionar una muestra de personas, pero no se tiene una lista completa del universo a investigar, pero sí una lista de las viviendas donde viven dichas personas, entonces se puede seleccionar una muestra de viviendas y luego seleccionar a todas o algunas de las personas que habitan en las viviendas elegidas. El diseño de la muestra consiste en seleccionar primero un conjunto de conjuntos (viviendas, como conjuntos de personas) y en una segunda etapa seleccionar personas.

<u>Definición:</u> Se dice que el conjunto A está incluido en otro conjunto B si se cumple que todo elemento de A es también un elemento de B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall\ a \in A \Rightarrow a \in B)$$

El símbolo "$\forall$" significa "para todo". Si el conjunto A está incluido en el B, también se dice que A es un *subconjunto* de B.



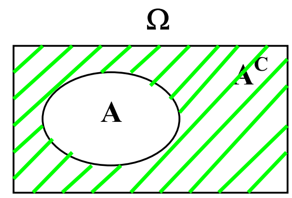
<u>Definición:</u> Si se cumple a la vez que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, entonces $A = B$. Esta es la definición matemática de igualdad de conjuntos. También se puede decir que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Las Ciencias Sociales tienen como objeto de estudio al Hombre, las relaciones entre el Hombre y la Sociedad, las relaciones entre grupos sociales, etc. Obsérvese que la Psicología y la sociología trabajan con conjuntos de individuos –pequeños grupos y grandes grupos humanos llamados sociedades– y al analizar los grupos, estos se definen en relación con el grupo más amplio posible, el cual se denomina "población" o "universo". Si se adopta la notación Ω para simbolizar al universo, entonces cualquier subconjunto A de personas de ese universo determina una partición del universo en dos clases:

- C_1 = conjunto de individuos de Ω que pertenecen al conjunto A
- C_2 = conjunto de individuos de Ω que **no** pertenecen al conjunto A

La clase C_2 se denomina "conjunto complementario de A respecto de Ω" (notación: A^C) y se puede definir también así:

$$A^C = \{x: x \in \Omega \text{ y } x \notin A\}$$



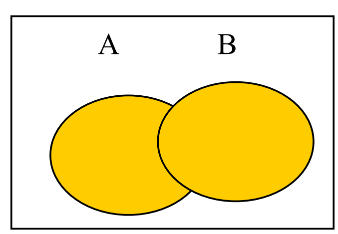
Las clases C_1 y C_2 determinan una partición de Ω si se cumple que ambas son no vacías. Más formalmente, una partición del universo es una regla que clasifica a los elementos del universo en clases separadas y no vacías. La partición puede determinar sólo dos clases, como en el ejemplo anterior, o más de dos clases, incluso hasta un número infinito de clases. Ejemplos:

1. El universo es el conjunto de todos los individuos residentes de un país, y las clases son dos: sexo femenino y sexo masculino.
2. El universo es el conjunto de todos los individuos residentes de la India y las clases son dos: consumidores de Campa-Cola y no consumidores del producto.
3. El universo es el conjunto de los hogares residentes de un país y las clases están definidas por el número de miembros del hogar: hogares unipersonales, hogares con 2 personas, etc. ¿Cuántas clases hay en Uruguay? ¿Cuál es la clase más frecuente?
4. $\Omega = N$
   $C_i = \{x: x \in N \text{ y } 5.(i-1) \leq x \leq 5.i-1\}$ con $i=1,2,3,\ldots\ldots$
   ¿Cuántos elementos tiene cada clase?

Entre los conjuntos es posible definir ciertas operaciones. Una *operación* pone en relación dos entidades –en este caso, dos conjuntos– y como resultado de dicha relación se obtiene una nueva entidad –en este caso, un conjunto–.

Definición: Dados dos conjuntos, A y B, se llama *unión de A con B* a otro conjunto que tiene todos los elementos de A y todos los elementos de B.

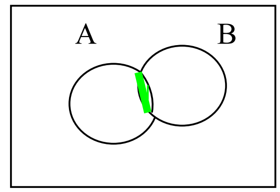
Notación: Unión de A con B = $A \cup B$



Propiedades de la unión de conjuntos

1. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
2. Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cup B = B$
4. $A \cup \Phi = A$ para todo conjunto A
5. $A \cup A^C = \Omega$

Definición: Dados dos conjuntos, A y B, se llama *intersección de A y B* a otro conjunto que tiene sólo los elementos comunes de A y B.



Propiedades de la intersección de conjuntos

1. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
2. Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$
4. $A \cap \phi = \phi$ para todo conjunto A
5. $A \cap A^C = \phi$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, se dice que ambos conjuntos son *disjuntos o mutuamente excluyentes*.

Propiedades que combinan unión e intersección

1. Distributiva respecto de la intersección: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Distributiva respecto de la unión: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. Ley de De Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
4. Ley de De Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Repartido Práctico 1: Teoría de conjuntos

Ejercicio 1

a) Escribir por extensión el conjunto: $A = \{x: x \text{ es natural}, 2 < 2.x - 3 \leq 11\}$
b) Hallar 5 elementos del conjunto $B = \{x: x \text{ es natural}, x \notin A\}$
c) Hallar 5 elementos del conjunto $C = \{(x, y): x \text{ es natural}, y \text{ es natural}, x\text{-}y = 3\}$
d) Con relación al conjunto anterior, ¿cuál de las siguientes expresiones es la correcta: $[10 \in C \text{ y } 7 \in C]$, $[(10,7) \in C]$?
e) Escribir por comprensión el conjunto de los números fraccionarios cuyos denominadores son mayores que los numeradores.
f) Escribir por comprensión el conjunto de los divisores de 10.
g) Sea el conjunto formado por 5 personas: {Ana, Juana, Jorge, Pedro, Luis}. Hallar el conjunto de todos los pares de personas distintas (importa el orden) con la condición que en cada par no haya dos varones.
h) Si $a \in B$ y $B \in \Theta$, ¿se deduce que $a \in \Theta$?
i) Mostrar que el conjunto $D = \{x: x \in N, 1 < x^3 < 100\}$ está incluido en el conjunto $E = \{x: x \in N, 1 < x^2 < 100\}$.
j) ¿De qué otra manera se puede definir el conjunto $F = \{x: x \in N \text{ y } x < 0\}$?

Ejercicio 2

a) Se tienen cuatro conjuntos, A es el conjunto de los múltiplos de 2, B es el conjunto de los múltiplos de 3, C es el conjunto de los múltiplos de 6 y D es el conjunto de los números impares. Calcular los conjuntos que resultan de las siguientes operaciones:

i)	$A \cap B =$	v)	$B \cap C =$
ii)	$B \cup C =$	vi)	$B \cap D =$
iii)	$A \cup D =$	vii)	$A \cap \phi =$
iv)	$A \cap D =$	viii)	$A \cup \phi =$

b) Considere el conjunto de los números naturales como universo ($N = \Omega$), y los conjuntos A, B, C y D definidos en el literal anterior. Hallar los siguientes conjuntos (definirlos por comprensión o en función de A, B, C ó D):
   i) A^C
   ii) D^C
   iii) $(A \cup D)^C$
   iv) $(A \cap D)^C$

c) Demostrar, usando diagramas de Venn, las *propiedades distributivas*.
Si A, B y C son tres conjuntos cualesquiera de Ω, entonces:
   i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

d) Demostrar, usando diagramas de Venn, las *leyes de De Morgan*.
   i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
   ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejercicio 3

En una población de 100.000 habitantes el 20% lee el periódico La Noche, el 25% lee el semanario El Encuentro, pero sólo el 5% lee ambas publicaciones. ¿Cuántos pobladores no leen ninguna de las dos publicaciones?

2. RELACIONES Y FUNCIONES

Definición: Se llama *producto cartesiano* del **conjunto de partida** A por el **conjunto de llegada** B (notación: AxB) a un conjunto de pares ordenados cuyo primer componente es un elemento de A y cuyo segundo componente es un elemento de B.

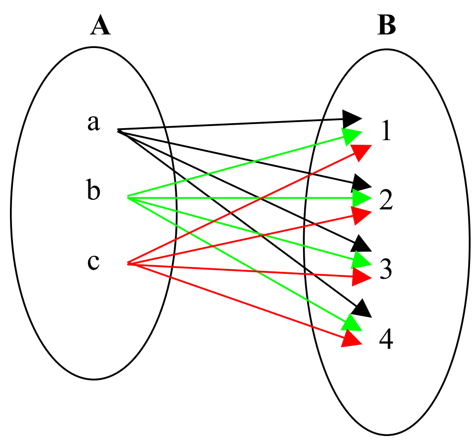
Ejemplo: A = {a,b,c}
B = {1,2,3,4}

AxB = {(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (c,1), (c,2), (c,3), (c,4)}

Obsérvese que los elementos de AxB son ahora pares ordenados. Por ejemplo, el par (a,3) pertenece al producto cartesiano, mientras que el par (3,a) no pertenece al producto cartesiano. Por lo dicho, en general, AxB $\neq$ BxA.

Si A y B son finitos, entonces el número de elementos de AxB es el producto del número de elementos de A por el número de elementos de B.

El producto AxB puede visualizarse en un diagrama de Venn, donde sus elementos (los pares ordenados) están dados por el origen y la punta de cada flecha.



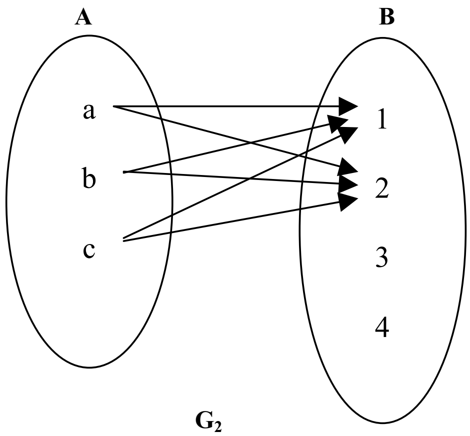
Definición: Se llama *relación de A en B* a una terna ordenada [A, B, G] donde G es un conjunto de pares ordenados de primera componente en A y segunda componente en B. El conjunto G se llama *gráfico* de la relación de A en B.

El gráfico de la relación es, por definición, un subconjunto del producto cartesiano de AxB. Se deduce que [A, B, AxB] es una relación.

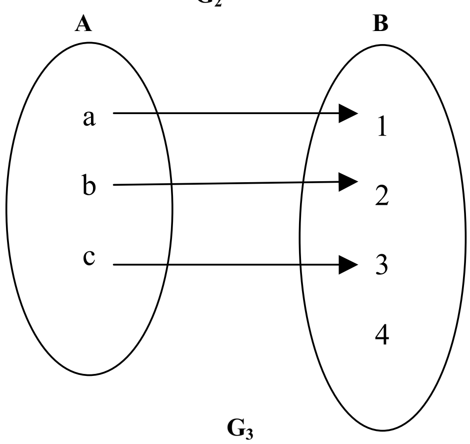
Los siguientes ejemplos son los gráficos de cuatro relaciones, los cuales se presentan expresados por extensión y luego mediante los diagramas de Venn. Los conjuntos A y B de la terna [A, B, G] son los del ejemplo anterior.

G_1 = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}
G_2 = {(a,1), (b,2), (c,3)}
G_3 = {(a,1), (b,1), (c,1)}
G_1 = {(c,4)}

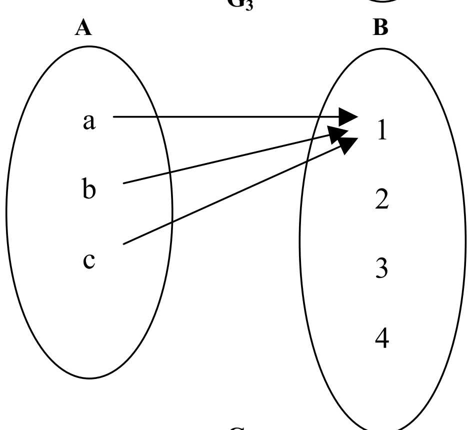
G_1



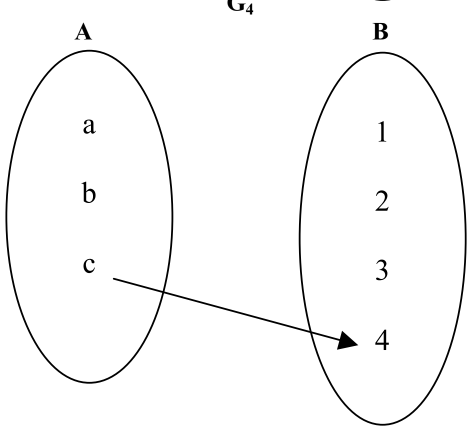
G_2



G_3



G_4



Algunas relaciones pueden definirse mediante la regla de formación de los pares, por comprensión. Por ejemplo, en el gráfico G_3 la relación consiste en hacer corresponder a todo elemento de A el elemento “1” de B.

Otro ejemplo: sea A el conjunto de todos los países de la Tierra y sea B el conjunto de todas las ciudades del mundo. Se definen dos relaciones:

R_1 = a cada país de A se le hace corresponder su capital en B.

R_2 = a cada país de A le corresponden en B todas las ciudades, de ese mismo país con más de 1.000.000 de habitantes.

En el caso R_1 todos los elementos de A son “origen” de una flecha, y solo una, en el gráfico porque todos los países tienen una sola capital (Bolivia podría considerarse una excepción del cual parten dos flechas). En el caso R_2 algunos países podrían no figurar como primera componente del gráfico por no tener mega-ciudades (Bolivia es un ejemplo de este tipo). De Uruguay partiría una única flecha en el gráfico de R_2 (pues Montevideo es la única mega-ciudad), mientras que de Brasil, Argentina, México y EEUU partirían varias flechas en el gráfico de R_2 (tantas como ciudades que pasan del millón de habitantes en dichos países).

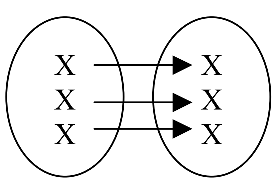
<u>Definición</u>: Se llama *función de A en B* a toda “relación de A en B” que cumple con dos condiciones:

a) Todo elemento de A tiene su correspondiente en B en el gráfico de la función.
b) Cada elemento de A tiene un único correspondiente en B en dicho gráfico.

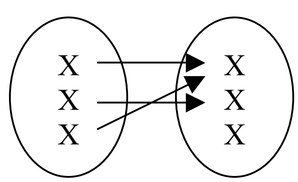
Notación: [A, B, f] donde A es el *dominio o conjunto de partida,* B es el *codominio o conjunto de llegada* y “f” es el gráfico de la función.

Entonces una función no es más que una relación, pero una relación particular, que debe cumplir las dos condiciones mencionadas en la definición. Veremos a continuación algunos ejemplos de relaciones para identificar cuáles de ellas son también funciones.

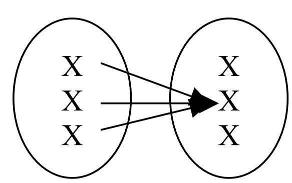
R_1



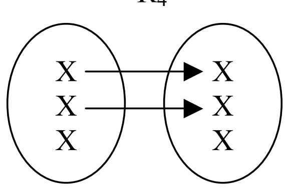
R_2



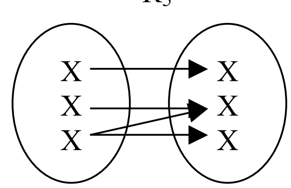
R_3



R_4



R_5



R_1, R_2 y R_3 son funciones. R_4 no es función porque falla la condición a) y R_5 no es función porque falla la condición b).

Otro ejemplo: la relación que hace corresponder a cada número natural (A es el conjunto de los naturales) su cuadrado (B es también el conjunto de los naturales) es una función, pues todo número natural tiene un cuadrado natural, y éste es único. Esta función tiene, además, una interpretación geométrica: relaciona el lado de un cuadrado con el área del cuadrado.

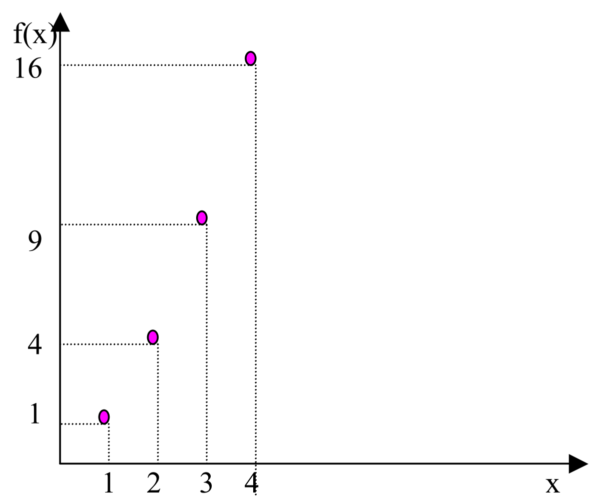
En el gráfico de una función el primer componente del par se denomina *argumento de la función* y el segundo componente es el *valor o imagen de la función* para dicho argumento. Si dominio y codominio de la función son conjuntos de números, entonces el argumento y valor se denominan también *abcisa* y *ordenada* respectivamente.

Notación: Si los conjuntos de partida y de llegada están sobreentendidos (por ejemplo, porque ambos son el conjunto de números naturales), un argumento cualquiera se simboliza con la letra "x" y al correspondiente de x según la función f se lo simboliza con la expresión "f(x)", entonces las notaciones más habituales para la función del último ejemplo son:

$$x \xrightarrow{f} f(x) = x^2$$

$$f\text{: } f(x) = x^2$$

En caso que dominio y codominio de la función sean conjuntos de números, resulta muy útil la represtación del gráfico en un par de ejes *cartesianos*[3] *ortogonales*.



En el gráfico precedente se representan, en la intersección de las líneas punteadas, cuatro elementos del gráfico de la función f: $f(x) = x^2$, los pares (1,1), (2,4), (3,9) y (4,16). Los ejes se dicen "ortogonales" porque son perpendiculares.

[3] René Descartes (1596-1650) filósofo, físico y matemático francés. Es el creador de la geometría analítica.

El conjunto de *valores de f*, elementos del codominio a los que llegan flechas, se denomina *conjunto imagen de f.*

Imagen de f = {z: z pertenece a B y existe x en A tal que f(x) = z}= f(A)

Definición: f es una función *inyectiva* de A en B si dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.

$$f \text{ es inyectiva } \leftrightarrow [x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)]$$

Ejemplo: la función f: $f(x) = x^2$ es inyectiva si el dominio es el conjunto N (pues a dos naturales diferentes corresponden cuadrados diferentes) pero no es inyectiva si el dominio es el conjunto de los enteros, pues por ejemplo $+3 \neq -3$ y sin embargo $(+3)^2 = (-3)^2$.

Definición: f es una función *sobreyectiva* si el conjunto imagen de f coincide con el codominio.

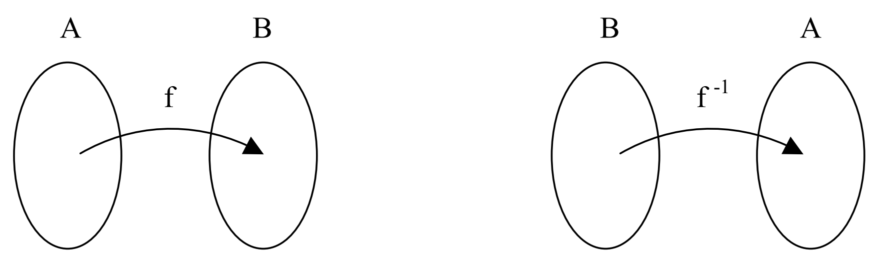
$$f \text{ es sobreyectiva } \leftrightarrow f(A) = B$$

Ejemplo: la función f: f(x) = x + 2, donde A y B son los números enteros, es sobreyectiva, pues todo número entero de B es imagen de algún elemento en A. En cambio, la función f: $f(x) = x^2$, con dominio y codominio entero, no es sobreyectiva porque por ejemplo el entero +3 en B no es imagen de ningún número entero de A.

Definición: Se dice que una función es *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

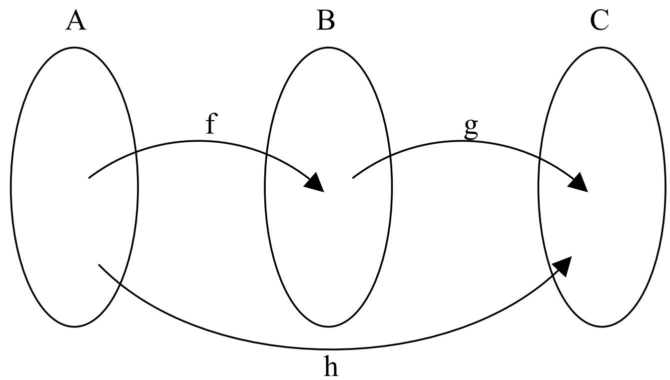
Definición: Sea f una función de A en B. Se denomina *función inversa de f* (notación: f^{-1}) a otra función tal que a cada imagen le hace corresponder su preimagen: [B, A, f^{-1}].

Observación: no siempre existe la función inversa. Para que exista la función inversa de f se tiene que cumplir que todo elemento de B sea imagen, y que cada elemento de B sea imagen de un único argumento. En otras palabras, para que exista f^{-1} se tiene que cumplir que f sea biyectiva.



Definición: Sean dos funciones [A, B, f] y [B, C, g]. Se dice que h es la función compuesta de f y g si el conjunto de partida de h es el conjunto de partida de f , el conjunto de llegada de h es el conjunto de llegada de g, y la imagen de un argumento x por g se obtiene de aplicar a x la función f y al valor f(x) la función g.

[A, C, h] función compuesta de [A, B, f] y [B, C, g] $\leftrightarrow$ h(x) = g[f(x)]



A
B
C
f
g
h

Repartido Práctico 2: Relaciones y Funciones

Ejercicio 1

Sean dos conjuntos: A = {María, Juana, Laura, Anastasia}
B = {Pedro, Raúl, Bernardo}

a) Hallar el producto cartesiano AxB (conjunto de parejas heterosexuales posibles).
b) Hallar el gráfico de la relación "Nombre de la mujer es alfabéticamente anterior que el nombre del varón".
c) Hallar el gráfico de las relaciones de pareja posibles teniendo en cuenta las siguientes restricciones simultáneamente:
   - María y Raúl son hermanos
   - Laura y Bernardo ya fueron pareja, se separaron y no pueden verse
   - Anastasia es tía de los tres varones.

Ejercicio 2

Sean dos conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{0, 2, 4, 6\}$

a) Hallar el producto cartesiano AxB.
b) ¿Es AxB = BxA?
c) Hallar el gráfico de la relación $R_1 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ a \leq b\}$
d) Hallar el gráfico de la relación $R_2 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ a = b\}$
e) Hallar el gráfico de la relación $R_3 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ 2.a = b\}$
f) Hallar el gráfico de la relación $R_4 = \{(a, b): (a, b) \in AxB,\ a^2 > b\}$

Ejercicio 3

Indicar cuáles de las siguientes relaciones son también funciones.

a) R_1 = A cada país le corresponde su capital
b) R_2 = A cada ciudad le corresponde el país donde está asentada.
c) R_3 = A cada mujer le corresponde su o sus hijos
d) R_4 = Hijo de
e) R_5 = Padre de
f) R_6 = A cada empleado de la empresa le corresponde un cargo en la empresa
g) R_7 = A cada cargo de la empresa le corresponde una persona de la PEA
h) R_8 = A cada persona de la PEA le corresponde un cargo en una empresa
i) R_9 = A cada consumidor de refrescos, la marca preferida de refrescos.

Ejercicio 4

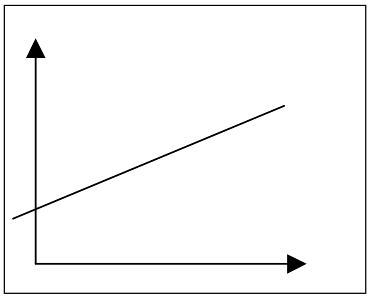
De las relaciones del Ejercicio 3 que son también funciones, indicar si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

Repartido Práctico 2: Relaciones y Funciones

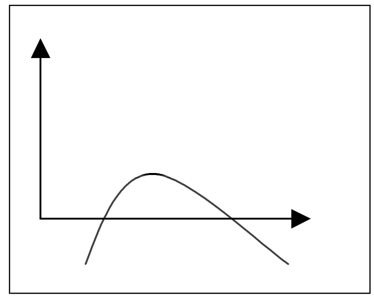
Ejercicio 5

En los siguientes casos indicar si el gráfico corresponde o no a una función, con dominio (conjunto de partida) y codominio (conjunto de llegada) de números reales.

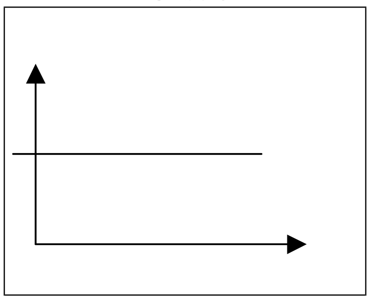
Caso 1



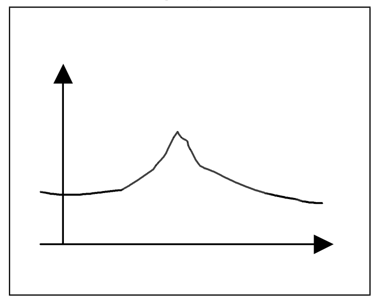
Caso 2



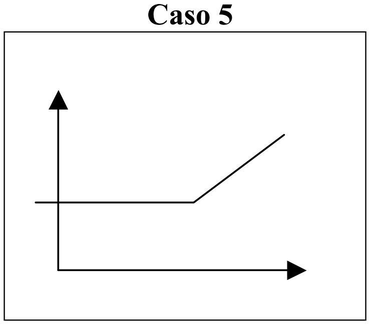
Caso 3



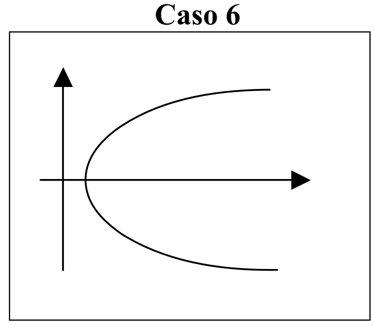
Caso 4



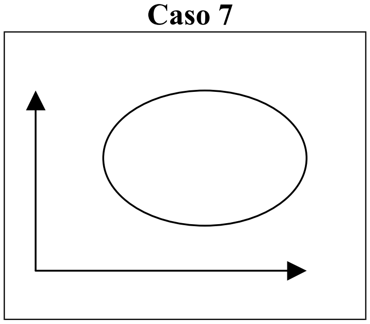
Caso 5



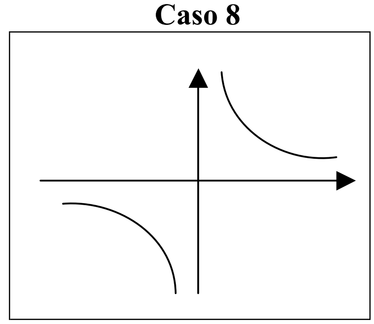
Caso 6



Caso 7



Caso 8



Repartido Práctico 2: Relaciones y Funciones

Ejercicio 6

Escribir mediante fórmulas del tipo $y = f(x)$ ó $z = f(x, y)$ las siguientes relaciones.

a) y = área de un cuadrado
x = medida del lado del cuadrado

b) y = área de un rectángulo, uno de cuyos lados mide 2
x = medida del otro lado del rectángulo

c) y = importe de la factura mensual del consumo eléctrico, que incluye solamente el cargo fijo del medidor ($60) y un precio único del kwh de $2.
x = cantidad de kwh consumidos en el mes

d) y = importe de la factura mensual del consumo eléctrico, que incluye:
- cargo fijo de $60
- potencia contratada de $120
- precio unitario de los primeros 100 kwh = $2
- precio unitario de los kwh por encima de los primeros 100 = $2,50
- impuestos sobre todos los conceptos: 26,69%

x = cantidad de kwh consumidos en el mes

e) z = importe de la factura mensual de ANTEL, que incluye:
- cargo fijo de $150
- precio unitario de los cómputos = $0,90
- precio del minuto de conexión a Internet = $0,30
- exoneración de los primeros 50 cómputos
- impuestos sobre todos los conceptos: 26,69%

x = cantidad de cómputos consumidos en el mes
y = cantidad de minutos de conexión a Internet

3. CONJUNTOS NUMÉRICOS. OPERACIONES CON NÚMEROS

Vamos a suponer que Ud. ya conoce los números, las operaciones que pueden realizarse con ellos y sus propiedades más importantes. Si esto no es cierto, algunas de las dificultades que se le habrán de presentar, Ud. podrá resolverlas con la ayuda de una computadora personal o con una calculadora de bolsillo. Pero algunos problemas quedarán sin resolver, y otros resultarán demasiado complicados si se desconocen los métodos para simplificarlos. Es con ese objeto –el resolver o simplificar algunos problemas– que se escriben estas líneas.

Empecemos con los *números naturales* (notación: N). Ellos son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Los puntos suspensivos indican que se trata de un conjunto infinito. Para un natural dado (tan grande como se quiera), siempre es posible encontrar un natural más grande. Sin embargo, entre dos naturales no siempre es posible encontrar otro natural (entre el 4 y el 5 no hay ningún natural).

El resultado de sumar o multiplicar dos naturales es siempre otro número natural. Pero la resta de naturales o la división no tienen, siempre, un resultado natural. Por ejemplo, $3 - 5 = -2$, que no es un número natural, y $3 : 5 = 3/5 = 0{,}6$, que tampoco es un número natural. Otro tanto ocurre con la radicación: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{125} = 5$, *pero* $\sqrt{3}$ no tiene un resultado "exacto" expresable en números naturales (ni siquiera en números decimales). Estas limitaciones conducen a la ampliación de los conjuntos de números.

Pero volviendo a los números naturales y sus operaciones, es necesario fijar algunas reglas. Si se tiene la expresión:

$$3 + 2 \text{ x } 3^4$$

es necesario establecer en qué orden deben efectuarse las operaciones, porque según cual sea el orden, el resultado es diferente. Supongamos que el orden consiste en realizar las operaciones en el orden en que aparecen en la expresión. Entonces la primera operación a realizar sería $3 + 2 = 5$. La segunda, la multiplicación de este resultado por 3, $5 \text{ x } 3 = 15$. Y la tercera, consistiría en elevar este resultado a la cuarta potencia: $15^4 = 15 \text{ x } 15 \text{ x } 15 \text{ x } 15 = 50.625$.

Sin embargo, sabemos que éste es un resultado "equivocado", porque en matemática las operaciones no se realizan en el orden en que aparecen, sino siguiendo unas *reglas de prioridad*. En este sentido, las reglas establecen que:

- En primer lugar, deben realizarse las operaciones de potenciación y radicación (ambas tienen la misma prioridad).
- En segundo lugar, las operaciones de multiplicación y de división (ambas tienen la misma prioridad).
- En tercer lugar, las operaciones de suma y resta (ambas tienen la misma prioridad).

En consecuencia, siguiendo con el ejemplo anterior, la primera operación a realizar es $3^4 = 81$. La expresión resulta ahora así:

$$3 + 2 \text{ x } 81$$

Las reglas de prioridad establecen que a continuación se debe realizar la multiplicación, obteniéndose: 2 x 81 = 162. La última de las operaciones es la suma, 3 + 162 = 165, resultado final de la expresión original.

Para realizar las operaciones combinadas hemos aplicado, entre otras, la regla que dice que los signos "+" y "menos" separan términos. Obsérvese que esta regla establece que primero deben efectuarse las "otras" operaciones, y finalmente las de suma y resta. Este es un caso particular de las reglas de prioridad que enunciamos más arriba.

¿Y si en realidad las operaciones que queríamos realizar en la expresión del ejemplo eran las del orden de aparición? En este caso habría que cambiar el orden de prioridad. El instrumento para hacerlo es el paréntesis.

$$[(3 + 2) \text{ x } 3]^4$$

Los paréntesis permiten cambiar las reglas de prioridad introduciendo las siguientes reglas adicionales.

- En primer lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro del paréntesis curvo.
- En segundo lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro del paréntesis recto.
- En tercer lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro de las llaves (luego veremos un ejemplo).
- Al interior de cada paréntesis y fuera de ellos se siguen aplicando las reglas de prioridad antes enunciadas.

En la última expresión, el paréntesis curvo indica que la primera operación a efectuar es (3+2). El paréntesis recto, que la segunda operación consiste en multiplicar por 3 el resultado de (3+2), (3+2)x3=15, y finalmente $15^4 = 50.625$.

Otro ejemplo: $2x\{3:[(5-2)x4]\} = 2x\{3:[3x4]\} = 2x\{3:12\} = 2x\{0,25\} = 0,5.$

Algunas computadoras y calculadoras de bolsillo no reconocen los paréntesis rectos o las llaves, y trabajan combinando los paréntesis curvos. En el mismo ejemplo anterior, las operaciones a efectuar se indicarían así:

2x(3:((5-2)x4))

La regla de prioridad en este caso es que se deben efectuar las operaciones contenidas en los paréntesis en el orden de “adentro hacia fuera”. En el ejemplo, primero se calcula (5-2), al resultado se lo multiplica por 4, etc.

Otra forma de alterar las reglas de prioridad consiste en extender los signos de división o de radicación, como a continuación se explica. Si queremos efectuar la operación 6:3, ésta también puede escribirse 6/3 ó $\frac{6}{3}$. Si la operación a efectuar es 6:(3+2), ésta también puede expresarse 6/(3+2) ó $\frac{6}{3+2}$. En consecuencia, la “raya larga” de división opera de la misma forma que un paréntesis, indicando que tiene primera prioridad la suma (3+2), y que luego debe efectuarse la división.

Otro tanto ocurre con la radicación. $\sqrt{4+5}$ indica que primero debe realizarse la suma, y luego la raíz cuadrada. En cambio, en la expresión $\sqrt{4}+5$, primero debe efectuarse la raíz cuadrada y luego la suma.

En uno de los ejemplos anteriores introdujimos los números 0,25 y 0,50 que no son números naturales. Veamos por qué se hace necesario introducir nuevas categorías de números.

En primer lugar, la resta de dos números naturales no siempre da como resultado un número natural. Por ejemplo, 3-5 no es natural y, en consecuencia, si se quiere generalizar la resta, es necesario definir un conjunto de números que incluya, entre otros, el resultado de 3-5. Tal conjunto es el de los *números enteros*. Ellos son los naturales acompañados de un signo “más” o “menos”:

$$.....,-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...$$

Los números enteros se representan con la letra **E** y forman un conjunto infinito, y para ahorrar esfuerzo, los números “positivos” se escriben sin el signo +. Este queda sobreentendido. Porque en la práctica, los enteros positivos funcionan como los números naturales. Esto es, se pueden realizar las mismas operaciones y gozan de las mismas propiedades.

¿En qué se diferencian los *enteros* de los *naturales*? Entre los enteros <u>siempre</u> es posible realizar la sustracción, es decir, la resta de dos enteros es un número entero. Como consecuencia de ello, para cada entero, siempre existe un entero “opuesto”. El opuesto de +3 es -3, el opuesto de -8 es +8, etc. Formalicemos esta propiedad junto con otras de interés general.

Propiedades de la suma de enteros

1. Conmutativa: para todo par de enteros a y b, se cumple que $a + b = b + a$.
2. Asociativa: para todo a, b y c enteros se cumple que $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Existencia de neutro: el cero es el único entero que, sumado con otro, da por resultado ese otro. $a + 0 = a \ \forall a$ entero.
4. Existencia de inverso: $\forall a \in E$, $\exists$ (-a) tal que $a + (-a) = 0$. Además el inverso es único.

Observaciones

a) Cuando la operación es la suma, el "inverso" se denomina "opuesto".
b) En el conjunto de los naturales <u>no se cumple</u> la propiedad del inverso.
c) Cuando en un conjunto (C) se define una operación (+) que cumple con las propiedades 2, 3 y 4, se dice que el par {C, +} tiene *estructura de grupo*. Si además se cumple la propiedad 1, entonces se dice que el grupo es *abeliano o conmutativo*.
d) {E, +}tiene estructura de grupo. Si consideramos los enteros y la multiplicación (.), para {E, **.**} se cumplen las tres primeras propiedades pero no la cuarta (Existencia de inverso). ¿Por qué no se cumple?

Existe una propiedad que combina las dos operaciones de suma y multiplicación:

Distributiva: si a, b y c son enteros, entonces $a.(b + c) = a.b + a.c$

Indica que hay dos formas de realizar la operación combinada: en una de ellas primero se suma (b + c) y al resultado se lo multiplica por a; en la otra, primero se multiplican a con b y a con c, y luego ambos resultados se suman.

Cuando en un conjunto C se definen dos operaciones ("+" y ".") que cumplen ambas con las propiedades 1, 2, 3 y 4, más la distributiva, entonces se dice que (C, +, .) tiene *estructura de cuerpo*.

Estructura de grupo
1. Conmutativa
2. Asociativa
3. $\exists$ de neutro
4. $\exists$ de inverso

Estructura de cuerpo	
+	.
1. Conmutativa	5. Conmutativa
2. Asociativa	6. Asociativa
3. $\exists$ de neutro	7. $\exists$ de neutro
4. $\exists$ de inverso	8. $\exists$ de inverso*
9. Distributiva	

*Excepto para el neutro de +

Está claro que {E, +, **.**} no tiene estructura de cuerpo, exclusivamente porque no se cumple la propiedad 4 para el producto: en enteros no se verifica la existencia de inverso. En general, dado un entero a, no existe otro entero a' tal que $a \times a' = 1$ (donde 1 es el neutro del producto). Por ejemplo, el inverso de (-3) sería (-1/3) porque $(-3)x(-1/3) = 1$. Pero (-1/3) no es un número entero.

Esta limitación de los enteros se levanta con la introducción de los *números racionales* (también conocidos como “fracciones” o números “decimales”). Por definición los números racionales son cocientes de la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

El conjunto de los números racionales (Q) es un conjunto con infinitos elementos, pero con una propiedad que no tienen los naturales ni los enteros: entre dos racionales diferentes, siempre hay otro racional. Probemos esta afirmación, conocida con el nombre de “densidad”.

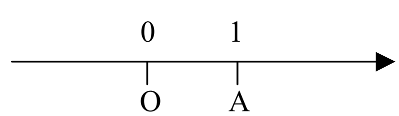
Sean a y b dos racionales diferentes, sea $a < b$. Si a es negativo y b positivo, entonces entre ambos está el racional cero. Probemos que entre dos racionales positivos siempre hay otro racional (la prueba es similar si ambos son negativos). Sean los racionales positivos p/q y r/s. Probaremos que $(p+r)/(q+s)$ es otro racional que está entre aquellos dos. $(p+r)/(q+s)$ es un racional porque $(p+r)$ es un entero y $(q+s)$ también lo es, y además es $(q+s) \neq 0$ (porque ambos son positivos). Se trata de un cociente de enteros que, por definición, es un número racional.

$(p+r)/(q+s) < r/s$, si se cumple que $(p+r).s < (q+s).r$, o también, aplicando la propiedad distributiva:

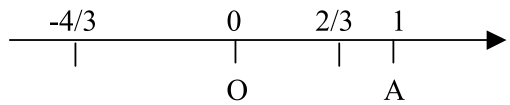
$$p.s + r.s < q.r + s.r$$

Por la propiedad conmutativa del producto resulta $r.s = s.r$. Si restamos a ambos miembros de la desigualdad la cantidad $r.s$, entonces la desigualdad se mantiene. Resulta: $p.s < q.r$, que es equivalente de $p/q < r/s$, que es la hipótesis de partida. La cadena de silogismos vale también en el sentido contrario, y con ello queda demostrado que si $p/q < r/s$, entonces $(p+r)/(q+s) < r/s$. La prueba se completa demostrando en forma análoga que $p/q < (p+r)/(q+s)$.

Cuando un conjunto numérico tiene la propiedad que entre dos elementos del conjunto siempre hay otro, se dice que el conjunto es *denso*. Como el conjunto Q es denso, parece razonable que podamos establecer una correspondencia (una función) entre los elementos de Q y los puntos de una recta. Sobre una recta damos un sentido (en la dirección de la flecha), un origen (el punto 0) y una unidad de medida (el segmento OA tiene medida “1”). El sentido de la recta nos indica la dirección en la cual crecen los números.



Cualquier número de Q tiene un correspondiente punto sobre la recta. Para ubicar el correspondiente de $2/3$ se procede como sigue: se divide el segmento OA en tres partes iguales, y luego se toma el doble de una de esas partes. El segmento resultante se mide a partir de O en el sentido de la flecha, y el segundo extremo indica el punto correspondiente a $2/3$. Para ubicar el correspondiente del número $-4/3$ en la recta, se divide OA en tres partes iguales y luego se toma un segmento cuatro veces más grande que el tercio hallado. El segmento resultante se mide a partir de O en el sentido contrario al de la flecha. El segundo extremo del segmento determina el punto correspondiente a $-4/3$.



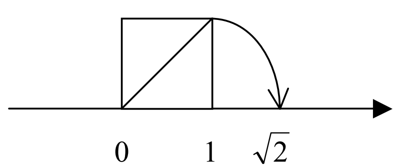
Cabe preguntarse si también se cumple el recíproco: ¿a todo punto sobre la recta le corresponde un número racional? La respuesta es negativa. Como ejemplo, puede tomarse el resultado de la radicación, una de las operaciones inversas de la potenciación.

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{porque} \quad 5^2 = 25$$

$$\sqrt[3]{\frac{1000}{27}} = \frac{10}{3} \quad \textit{porque} \quad \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$$

Entonces $\sqrt{25}$ y $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$ son racionales. Pero $\sqrt{2}$ no tiene respuesta en el conjunto de los racionales. Por el absurdo: si $\sqrt{2}$ fuera racional, entonces se podría escribir como cociente de dos enteros: $\sqrt{2}$ = a/b, donde a y b son enteros sin factores comunes (fracción reducida). Por definición, resulta $2 = (a/b)^2$. Se deduce: $2.b^2 = a^2$. Como el factor 2 aparece a la izquierda en la igualdad, a^2 también debe contener el factor 2. Entonces el número a puede escribirse de la forma a = 2.c. Entonces: $a^2 = (2.c)^2 = 4.c^2$. Entonces: $2.b^2 = 4.c^2$, o lo que es lo mismo, $b^2 = 2.c^2$. Con el mismo razonamiento, b contiene el factor 2, lo cual es absurdo porque a y b eran dos enteros sin factores comunes. Conclusión: $\sqrt{2}$ no es un número racional. Lo mismo ocurre con muchos otros resultados de la radicación, y también con los de la otra operación inversa de la potenciación, la logaritmación.

Si se quiere ubicar el punto sobre la recta correspondiente a $\sqrt{2}$, alcanza con construir un cuadrado de lado 1. Por Pitágoras, las diagonales del cuadrado miden $\sqrt{2}$. Tomando la diagonal del cuadrado, con origen en O y en el sentido de la flecha, el segundo extremo de la diagonal proyectada indica el punto de la recta correspondiente a $\sqrt{2}$.



Todos los puntos sobre la recta que no se corresponden con un número racional, se denominan *irracionales*. Se define el conjunto de los *números reales* (R) como la unión de Q con el conjunto de los irracionales.

Observaciones

a) El conjunto de los números reales completa la recta. A cada número de R le corresponde un punto sobre la recta y viceversa. La relación entre R y los puntos de la recta es una *función biyectiva*.
b) El conjunto R es infinito y denso.
c) ¿Todos los resultados de la radicación son números reales? La respuesta es negativa –por ejemplo $\sqrt{-1}$ no es un número real– y este es el origen de una nueva categoría de números, los números complejos, que nosotros no estudiaremos.

Los números reales son, de los que hemos presentado, el conjunto más amplio en el que se pueden definir las operaciones racionales –suma, resta, multiplicación y división– sin restricciones (excepto la división entre cero), pero también la potenciación –con algunas restricciones– y también sus operaciones inversas: radicación y logaritmación. Dedicaremos estas últimas notas a presentar estas operaciones y sus principales propiedades.

Potenciación

Definición: $a^n = \begin{cases} a.a.a......a & (producto\ de\ n\ factores\ a,\ si\ n\ es\ natural) \\ a^0 = 1 \end{cases}$

Observaciones

a) 0^0 no está definido, no es un número.
b) Si n no es natural, la definición de a^n es un poco más complicada y no nos ocuparemos de ella. Digamos que podemos resolver los problemas que se nos presenten usando la función x^y que tienen todas las máquinas científicas. Así, para calcular $1{,}05^{3{,}5}$ se procede de la siguiente manera:

- se introduce en la máquina el número 1,05
- se aprieta la tecla "x^y"
- se introduce 3,5
- se aprieta la tecla "="
- se obtiene 1,186212638.

Algunas máquinas exigen que en el primer paso se introduzca 3,5 y en el tercer paso el número 1,05. Algunas máquinas tienen un visor más pequeño (con menos dígitos) y la respuesta podría ser 1,186213. En ambos casos se trata de aproximaciones de un número real, cuya expresión decimal contiene infinitas cifras. $1{,}05^{3{,}5}$ puede interpretarse como el monto que genera un capital de $1 colocado a interés compuesto, a la tasa del 5% anual durante 3,5 años. Obsérvese que 1,19 es una aproximación suficiente para este último problema, dado que sólo existe la posibilidad de cobrar o pagar con fracciones que llegan hasta los centésimos.

Propiedades de la potenciación

Sean: a, b, n y m números naturales, a y b $\neq$ 0.

1. $a^n.a^m = a^{n+m}$ (producto de potencias de igual base)
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (cociente de potencias de igual base)

3. $a^n.b^n = (a.b)^n$ (producto de potencias de igual exponente)
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (cociente de potencias de igual exponente)
5. $(a^n)^m = a^{n.m}$ (potencia de potencia)

Ejemplo: utilizar las propiedades anteriores para simplificar $\dfrac{2^8.4^7.8^5}{(2.4)^7.8^4}$.

$$\frac{2^8.4^7.8^5}{(2.4)^7.8^4} = \frac{2^8.4^7.8^5}{2^7.4^7.8^4} = \frac{2^8}{2^7}x\frac{4^7}{4^7}x\frac{8^5}{8^4} = 2^{8-7}x4^{7-7}x8^{5-4} = 2^1x4^0x8^1 = 16.$$

Radicación

<u>Definición</u>: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2\ porque\ 8 = 2^3$. La forma más fácil de resolver los problemas de radicación, consiste en transformarlos en problemas de potenciación, adoptando la siguiente definición complementaria:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

y utilizando la máquina de calcular con las teclas “x^y” o “$x^{1/y}$”.

Cuando se tienen varios radicales, resultan útiles los siguientes resultados.

Propiedades de la radicación

1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ está definida en el conjunto de los números reales si:

- n es impar y a un real cualquiera, o
- n es par y a es un real no negativo.

Que la expresión *está definida* significa que puede calcularse exactamente o con una aproximación decimal (las más de las veces) por ejemplo, con la ayuda de una calculadora. Que *no existe* la expresión para un radicando negativo y un índice par, significa que se trata de una operación no permitida dentro del conjunto de los números reales.

Logaritmación

Definición: $\log_b x = a \Leftrightarrow x = b^a$

Para que tenga sentido (para que sea un número real) la expresión del logaritmo, se requieren tres condiciones a saber:

$$x > 0,\ \ b > 0\ \ y\ \ b \neq 1.$$

De la definición se deduce que la logaritmación es una de las operaciones inversas de la potenciación: se conoce la potencia de la base (b) y el resultado de la potencia (x), y la incógnita es el exponente (a) al cual debe elevarse la base para obtener aquel resultado (x). De la propia definición se deduce que:

1. $\log_b b = 1$
2. $\log_b 1 = 0$
3. $\log_b b^n = n.\log_b b$

Con un poco de trabajo adicional se demuestran las siguientes propiedades.

4. $\log_b a + \log_b c = \log_b (a.c)$
5. $\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$
6. $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Problema

Un capital de \$10.000 se coloca al 3% mensual efectivo de interés compuesto. Se pide calcular los intereses acumulados luego de: a) 5 meses, y b) 5 meses y 18 días.

La fórmula del monto generado por un capital (C) colocado a interés compuesto a la tasa i durante t períodos es:

$$M = C.(1 + i)^{t}$$

La fórmula es válida siempre que la tasa de interés y el período de la colocación se midan en la misma unidad de tiempo (por ejemplo, en meses). La fórmula para calcular el interés es:

$$I = M - C$$

Ahora es posible resolver los dos problemas antes planteados.

a) Interés generado en 5 meses: $M - C = 10.000(1+0,03)^5 - 10.000 = \$1.592,74$.
b) En 5 meses y 18 días: $M - C = 10.000(1+0,03)^{5+(18/30)} - 10.000 = \$1.654,58$.

Expresiones decimales y notación científica

Las calculadoras científicas, salvo excepciones, no devuelven los resultados de las operaciones en forma fraccionaria, sino que lo hacen con notación decimal. Los siguientes son algunos ejemplos:

$1/3 = 0{,}33333333333$

$\sqrt{2} = 1{,}41421356$

$\log 2 = 0{,}30103$

$L2 = 0{,}693147$

Para aprovechar mejor el espacio del visor, la calculadora utiliza, cuando lo necesita, la notación científica con potencias de 10. Ejemplos:

$0{,}0000008 = 8 \times 10^{-7}$

$3.456.500.000 = 3{,}4565 \times 10^{9}$

Ejemplos de operaciones prohibidas en el conjunto de los números reales

$$\frac{5}{0} \qquad 0^0 \qquad \sqrt[2n]{-a} \quad con\ a > 0 \qquad \log_1 a \qquad \log_{-3} a \qquad \log_{10} -4$$

Origen de los números e y π

π es la constante por la que se debe multiplicar el diámetro de una circunferencia para hallar el perímetro de dicha circunferencia. Los antiguos griegos creían que dicha constante era igual al cociente 223 entre 71 (que es una excelente aproximación). Resulta que π es un número real, no racional, que ni siquiera puede escribirse usando radicales. Se dice que π es un número "trascendente", lo que significa que dicho número no puede ser raíz de ninguna ecuación polinómica de coeficientes enteros.

El número **e** (en honor del matemático Euler[4]) es otro real trascendente. Se lo utiliza como base de los logaritmos "naturales" o "neperianos". Puede obtenerse una aproximación de dicho número tomando algunos términos de la suma infinita:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$$

o tomando n grande en la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$. Por ejemplo: $e \cong (1+0{,}01)^{100} \cong 2{,}7048$. Una mejor aproximación del número **e** es 2,718281828.

Una aplicación de logaritmos

En el problema de la colocación financiera teníamos un capital de \$10.000 colocado al 3% de interés mensual efectivo. Nos preguntamos ahora por cuánto tiempo deberá permanecer colocado el capital para generar \$2.000 de interés.

---

[4] Leonardo Euler (1707-1783) matemático suizo que además investigó en el campo de la física, la química, la metafísica y la astronomía.

Solución: generar \$2.000 de interés es lo mismo que generar un monto de \$12.000. El planteo es entonces así:

$$12.000 = 10.000.(1+0,03)^{t}$$

donde la incógnita a encontrar es "t", el tiempo que debe permanecer colocado el capital para generar \$2.000 de interés. Operando en la ecuación resulta:

$$1,03^{t} = 1,2$$

Pasando a logaritmos: $\log(1,03^{t}) = \log 1,2$ y utilizando una de las propiedades de logaritmos se obtiene:

$$t \times \log 1,03 = \log 1,2$$

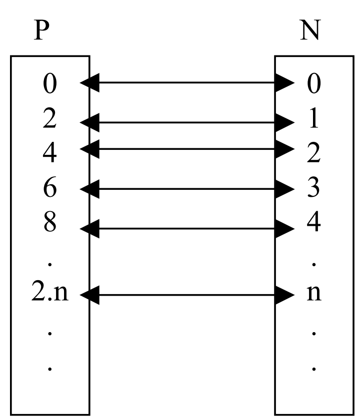
$$t = \frac{\log 1,03}{\log 1,2} = 6,168$$

Encontramos que el capital debe colocarse por aproximadamente 6 meses y 5 días para generar \$2.000 de interés.

Cotas y extremos de un conjunto

Los conjuntos de números pueden ser finitos o infinitos. N, E, Q y R son ejemplos de conjuntos infinitos. En virtud de la densidad de los racionales y de los reales, sabemos que entre dos racionales (reales) hay también infinitos racionales (reales).

Se dice que un conjunto es *infinito numerable* si sus elementos se pueden hacer corresponder biunívocamente con el conjunto de los naturales. Aunque parezca una paradoja, el conjunto de los números naturales pares (P) se puede poner en correspondencia biunívoca con N; en consecuencia, P es un conjunto infinito numerable.



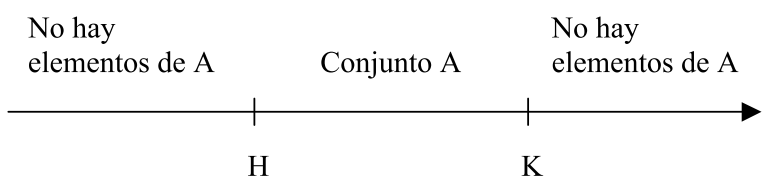
No es fácil, pero se puede demostrar que Q es un conjunto infinito numerable. En cambio, R es un conjunto infinito no numerable (tampoco es fácil la demostración), y también es un conjunto infinito no numerable cualquier intervalo de números reales.

¿Cuáles son los conjuntos de números más usuales en Matemática? La respuesta es: el conjunto N, el conjunto R y ciertos subconjuntos de R que se definen a continuación.

Intervalo cerrado de extremos a y b: $[a, b] = \{x: x \in R, a \leq x \leq b\}$
Intervalo abierto de extremos a y b: $(a, b) = \{x: x \in R, a < x < b\}$
Intervalo semiabierto por izquierda: $(a, b] = \{x: x \in R, a < x \leq b\}$
Intervalo semiabierto por derecha: $[a, b) = \{x: x \in R, a \leq x < b\}$
Semi-recta de los puntos a la derecha de K, con K incluido = $\{x: x \in R, x \geq K\}$
Cuando K es "grande", este conjunto también se conoce como "entorno de + infinito".
Semi-recta de los puntos a la izquierda de H, con H excluido = $\{x: x \in R, x \leq H\}$
(Si H es negativo y "grande", este conjunto se denomina "entorno de – infinito").
Entorno de centro "a" y radio "r": $\cup_{a,r} = \{x: x \in R, a - r < x < a + r\}$
Entorno *reducido* de centro "a" y radio "r": $\cup^*_{a,r} = \{x: x \in R, x \neq a, a - r < x < a + r\}$

Definición: Se dice que un conjunto A de números está *acotado* si se cumplen a la vez las dos condiciones siguientes:

a) $\exists$ un número K tal que $x \leq K \; \forall \; x \in A$
b) $\exists$ un número H tal que $x \geq H \; \forall \; x \in A$



Se dice que el conjunto A está *acotado superiormente* si se cumple la condición a) Se dice que el conjunto A está *acotado inferiormente* si se cumple la condición b). Se dice que K es una *cota superior* del conjunto A, y que H es una *cota inferior* del conjunto A.

Observaciones

1. Si el conjunto A es finito, entonces está acotado. Alcanza con ordenar los elementos de A de menor a mayor, y entonces el menor es una cota inferior mientras que el mayor valor de A es una cota superior.
2. Si K es una cota superior del conjunto A, entonces todo número mayor que K también es cota superior de A. Si H es una cota inferior del conjunto A, entonces todo número menor que H también lo es.
3. Si el conjunto A es infinito, entonces puede o no estar acotado. Ejemplos:
   - N está acotado inferiormente pero no superiormente. 0 es una cota inferior. No es posible encontrar un $K: n \leq K \; \forall \; n \in N$. Entonces, N no está acotado.
   - El conjunto E no está acotado inferior ni superiormente.
   - [a, b] es un conjunto acotado. Por ejemplo, b y (b+1) son cotas superiores, mientras que a y (a-3) son cotas inferiores.
   - $\cup_{a,r}$ es un conjunto acotado. (a-r) y (a+r) son una cota inferior y otra superior.

Si un conjunto A admite cotas superiores, la menor de las cotas superiores se llama *supremo del conjunto A*. Si el supremo, además, pertenece al conjunto A, entonces el supremo se llama *máximo o extremo superior del conjunto A*. Análogamente, si el conjunto A admite cotas inferiores, la mayor de las cotas inferiores se llama *ínfimo del conjunto A*, y si el ínfimo pertenece al conjunto A, entonces se llama *mínimo o extremo inferior del conjunto A*.

Problema

En la Edad Media una viejita cuenta sus gallinas. Si cuenta de 2 en 2 le sobra una, si cuenta de 3 en 3 le sobra una, si cuenta de 4 en 4 le sobra una y si cuenta de 5 en 5 le sobra una. Hallar cuántas gallinas tiene la viejita. a) Hallar el conjunto de soluciones posibles del problema. b) Hallar el mínimo de dicho conjunto.

El símbolo sumatoria

Los elementos de un conjunto, a veces, se pueden escribir mediante una fórmula, lo que permite simplificar notablemente la notación. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares puede simbolizarse por “2.n” donde n XN. Análogamente, la expresión “2.n + 1” simboliza un número natural impar cualquiera, y n^2 representa a los números naturales que son cuadrados perfectos.

En muchas aplicaciones es necesario realizar operaciones tales como la suma o el producto de números que tienen “la misma forma” porque pertenecen a conjuntos cuyos elementos están relacionados mediante una fórmula general. En estos casos, la suma de dichos números puede escribirse utilizando la letra sigma mayúscula (n). La expresión:

$$\sum_{i=1}^{8} Fórmula(i)$$

indica que se deben sumar 8 sumandos los cuales resultan de sustituir el índice “i” en la “Fórmula(i)” por los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{8} 2.i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 + 2.6 + 2.7 + 2.8$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=3}^{6} (2.i - 1) = 5 + 7 + 9 + 11$$

¿Cómo puede escribirse la suma (17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41) mediante el símbolo sumatoria? Es necesario explicitar la “Fórmula(i)” y determinar el recorrido del índice “i”. Para encontrar la fórmula, puede observarse que se trata de sumandos impares, que van saltando de 4 en 4. Entonces, una fórmula apropiada es (4.i + 1) con i = 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

$$17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 = \sum_{i=4}^{10} (4.i + 1)$$

Obsérvese que (4.i – 3) también sirve como fórmula para resolver el problema. En tal caso, ¿qué valores debería tomar el índice i?

Sea el conjunto A con n números, cada uno de los cuales se simboliza con x_i.

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots.. , x_n\}$$

La suma de todos los elementos de A es: $\sum_{i=1}^{n} x_i$ y el promedio de los elementos de A es:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots.. + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Supongamos ahora que los elementos del conjunto se pueden disponer en un cuadro de doble entrada (cuadro de filas y columnas), disposición que se conoce con el nombre de “matriz”.

	C_1	C_2	C_3	……..	C_n
F_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	……..	x_{1n}
F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	……..	x_{2n}
F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	……..	x_{3n}
…..					
F_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	……..	x_{mn}

Esta matriz tiene m filas ($F_1, F_2, \ldots.. , F_m$) y n columnas ($C_1, C_2, \ldots.. , C_n$). La suma de los elementos de la primera fila es $\sum_{i=1}^{n} x_{1_i}$. La suma de los elementos de la tercera columna es $\sum_{i=1}^{m} x_{i3}$. Para facilitar la notación en este caso resulta conveniente utilizar índices distintos para filas y columnas. Entonces, la suma de los elementos de la tercera columna se puede expresar también así: $\sum_{j=1}^{m} x_{j3}$.

Si se trata ahora de sumar todos los elementos de la matriz, entonces se puede utilizar una “doble sumatoria”:

Suma de todos los elementos de la matriz: $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$

Propiedades de la sumatoria

1. Constante multiplicativa: $\sum (K.x_i) = K.\sum x_i$
2. Sumatoria de una suma: $\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$

3. Interversión del símbolo: $\sum_{i}\sum_{j} x_{ij} = \sum_{j}\sum_{i} x_{ij}$

Si en lugar de sumar los elementos x_i se trata de multiplicarlos, entonces se utiliza la expresión *productoria* mediante el símbolo pi mayúscula:

$$x_1.x_2.x_3.....x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Por ejemplo, para representar el producto de 1x2x3x4x…..x25 mediante el símbolo productoria, se tiene:

$$1x2x3x4x.....x25 = \prod_{i=1}^{25} i$$

Se recuerda que para este producto particular – el producto de un número natural por todos los menos que él hasta llegar al uno o también “factorial” del número– existe una notación aún más simple usando el signo final de admiración:

$$1x2x3x4x.....x25 = 25!$$

Repartido Práctico 3.1: Operaciones con números. Uso de la calculadora

Ejercicio 1

Utilizando las propiedades de las operaciones racionales, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

	V	F
a) $5a.(x+3) = 5a.x + 15a \quad \forall a,x$	□	□
b) $(2 - x) + y = 2 + (y - x) \; \forall x,y$	□	□
c) $(-2).(x - y) = -2x - 2y \quad \forall x,y$	□	□
d) $\frac{4 + 40}{4} = 40$	□	□
e) $\frac{x.(x+2)+x}{x.(x+1)} = \frac{(x+2)+x}{x+1} \quad \forall x$	□	□
f) $\frac{x.(x+2)+x}{x.(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \quad \forall x$	□	□

g) (-1).(-2).(- 3 – 4) = - 10 □ □

h) (-1).(-2).(- 3 – 4) = - 14 □ □

i) $2^0 = 1$ □ □

j) $2^1 = 0$ □ □

k) $\sqrt{0} = 0$ □ □

l) $\sqrt{1} = 1$ □ □

m) $\sqrt{2} = 2$ □ □

n) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ □ □

o) $\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$ □ □

p) $\left[\frac{1}{(-2)^{-1}}\right]^{-2} = \frac{1}{4}$ □ □

Ejercicio 2

Calcular con la calculadora, aproximando con dos decimales.

a) $\sqrt{3} =$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}} =$

c) $\frac{1}{\sqrt{7}} =$

d) $\frac{5}{\sqrt{11}} =$

e) $\frac{3}{\sqrt{16}} =$

f) $\frac{-3}{\sqrt[3]{8}} =$

g) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{-8}} =$

h) $\left(\dfrac{1000}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} =$

i) $\sqrt[4]{2} =$

j) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt[3]{18}} =$

k) $(1 + 0{,}03)^{2{,}5} =$

l) $(1 + 0{,}02)^{24} =$

m) $1/(1 + 0{,}02)^{24} =$

n) log 23 =

o) log 2 + log 5 =

p) log 20 – log 2 =

q) log 10.000 =

r) $2{,}3^{\,2{,}3} =$

Repartido Práctico 3.2: Sumatoria, cotas y extremos de un conjunto

Ejercicio 1

Una canasta de consumo alimenticio se compone de 6 artículos, con los siguientes datos.

ARTÍCULO(i)	CANTIDAD(q_i)	PRECIO(p_i)	COSTO(c_i)
Leche	20	6	5
Vino	12	20	16
Carne	10	30	20
Pan chico	40	2	1
Queso	4	48	30
Yerba	5	25	20

<u>SE PIDE:</u>

1. Calcular el valor de la canasta a precios de venta (presupuesto mensual).
2. Calcular el valor de la canasta a precios de costo.
3. Calcular el margen comercial total.
4. Calcular el margen de contribución por producto de la canasta.
5. Calcular el margen de contribución relativo por producto de la canasta.

Ejercicio 2

Una canasta de consumo alimenticio se compone de **k** artículos (k > 100), con los siguientes datos.

ARTÍCULO	CANTIDAD	PRECIO	COSTO
1	Q_1	P_1	C_1
2	Q_2	P_2	C_2
3	Q_3	P_3	C_3
---	---	---	---
k	Q_k	P_k	C_k

SE PIDE:

Plantear utilizando el símbolo de sumatoria.

1. El valor de la canasta a precios de venta.
2. El valor de la canasta a precios de costo.
3. El valor de la canasta a precios de venta de los primeros 20 artículos.
4. El valor de la canasta a precios de costo de los últimos 15 artículos.
5. El margen comercial total.
6. El margen de contribución relativo promedio, ponderando con el valor de cada producto en el presupuesto mensual.
7. Calcular el margen de contribución relativo promedio, así ponderado, con los datos del Ejercicio 1.

Ejercicio 3

Calcular las siguientes sumas.

$$a)\ \sum_{i=1}^{12} i =$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{9} i^2 =$$

$$c)\ \sum_{i=4}^{11} (2.i - 1) =$$

Ejercicio 4

Escribir utilizando el símbolo de sumatoria:

a) 2 + 4 + 6 + 8 + ... +100 =
b) 1 + 3 + 5 + 7 + ... +75 =
c) 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 1024 =
d) 17 + 21 +25 +29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 =
e) 1 – 2 + 4 – 8 + 16 - ... + 1024 =

f) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2048}=$

g) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=$

h) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}=$

i) $1+2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\frac{32}{120}+.....=$

Ejercicio 5

Hallar, si existen, una cota inferior y una cota superior de los siguientes conjuntos.

$A = \{1,3,5,7,...,101\}$
$B = \{x: x = 1 + 1/n, \text{ con } n \in N^+\}$
$C = \{x: x \in [0,2]\}$
$D = \{x: x \in N, \text{ x es divisible entre } 2\}$
$E = \{x: x \in N, \text{ x es un divisor de } 36\}$
$F = \{x: x \in N, \text{ x es el resto de dividir 36 entre un natural cualquiera}\}$
$G = \{x: x \in R, x^2 + 2.x - 3 = 0\}$
$H = \{x: x \in R, x^2 + x + 1 = 0\}$

Ejercicio 6

Se tiene una cuerda de largo L. Se puede construir con la cuerda un cuadrado o un hexágono regular, ambos de perímetro L. Se quiere saber cuál de los dos tiene mayor área.

4. POLINOMIOS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Monomios

Se conocen como *operaciones algebraicas*[1] a la suma, resta, multiplicación y división. Vamos a concentrarnos en primer lugar en las operaciones de suma, resta y multiplicación.

Definición: Se llama *monomio* al producto de números por letras. Los "números" pertenecen al conjunto de los reales y las "letras" son números desconocidos o "indeterminadas".

Así, son monomios:

3.x.8.x
y.5.y.y
z.z.x.y.x.3.z.z.z
y.x

Por convención, se acostumbra utilizar las últimas letras del alfabeto. Como las letras representan números, entonces es posible operar con ellos como si fueran números: valen para los monomios todas las propiedades del producto de números reales. Por eso, los ejemplos anteriores se pueden escribir colocando los números a la izquierda y las letras a la derecha, por ejemplo, en orden alfabético, en virtud de la propiedad conmutativa del producto de números:

$24.x^2$
$5.y^3$
$3.x^2.y.z^5$
$x.y$

En el monomio se pueden reconocer ciertas "partes":

- el *coeficiente*: es la parte numérica del monomio (24, 5, 3 y 1 en los ejemplos)
- la *parte literal*: es el producto de las indeterminadas (x^2, y^3, $x^2.y.z^5$, x.y en los ejemplos)
- el *grado* del monomio: es la cantidad de letras que figuran en la parte literal (2, 3, 8 y 2 en los ejemplos). Cuando el monomio es un número, no hay letras, el grado del monomio es cero.

---

[1] Álgebra proviene del árabe (*algiabr*) y se utiliza para denominar el estudio de operaciones y propiedades de ciertos entes representados por símbolos, generalmente letras. El origen del álgebra parece que debe situarse en India y Persia. Existen antecedentes entre los griegos (Diofanto, siglo III), aunque fueron los árabes quienes la introdujeron en Europa en el siglo IX.

Polinomios

Definición: Se llama *polinomio* a la suma o resta de monomios.

Son ejemplos de polinomios:

$24.x^2 - y^3$
$2.x^1$
$x^1 + y^1 + z^1$
$2.x^0 + 3.x^1 + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$
$x^4 + x^2 + x^0$

Los polinomios pueden depender de una o más indeterminadas (una o más letras). El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de sus monomios.

Ejemplos:
$gr(24.x^2 - y^3) = 3$
$gr(2.x^1) = 1$
$gr(x^1 + y^1 + z^1) = 1$
$gr(2.x^0 + 3.x^1 + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4) = 4$
$gr(x^4 + x^2 + x^0) = 4$

Definición: Un polinomio en varias indeterminadas es *homogéneo de grado n* si todos sus monomios son de grado n.

Ejemplos:

$x^3 + y^3$ es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2.x.y + y^2$ es homogéneo de grado 2
x^3 es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2.y$ no es un polinomio homogéneo.

Consideremos ahora polinomios en una sola indeterminada (sólo la letra x). Algunas simplificaciones en la notación. Cuando un monomio tiene coeficiente cero, entonces se lo elimina del polinomio. Cuando el grado de un monomio es 1, entonces no se escribe el exponente 1 ($3.x^1$ se escribe $3.x$). El monomio $5.x^0$ se escribe simplemente 5.

Se dice que un polinomio (en una sola indeterminada) está *reducido* si todos sus monomios son de distinto grado.

Ejemplos:

$-3.x^5 + 5.x^3 – 2.x$ es un polinomio reducido
$2.x^4 + 4.x^2 – 5.x^4$ no es un polinomio reducido

Para obtener un polinomio reducido en el segundo ejemplo, alcanza con realizar la operación $2.x^4 – 5.x^4 = (2 – 5).x^4 = -3.x^4$.

Se dice que un polinomio está *ordenado* si los monomios aparecen en orden creciente o decreciente de sus grados.

Ejemplos:

$2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio ordenado

$2.x^4 + 4.x^2 – 5.x^3$ no es un polinomio ordenado

Se dice que un polinomio de grado n es *completo* si en su desarrollo figuran todos los monomios de grado menor o igual que n, con coeficientes diferentes de cero.

Ejemplos:

$2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio completo
$-3.x^5 + 5.x^3 – 2.x$ no es un polinomio completo (los monomios de grado 2 y de grado 0 tienen coeficiente 0)

El polinomio $2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio reducido, ordenado y completo.

Los polinomios son entidades matemáticas –como lo son los números y los conjuntos–. Se acostumbra denominarlos con letras mayúsculas de nuestro alfabeto –como a los conjuntos– y cuando es necesario se explicita el nombre de la indeterminada.

$$P = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$$
$$P(x) = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$$

<u>Definición</u>: Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y, una vez reducidos y ordenados, tienen iguales todos los coeficientes respectivos.

Ejemplo: Los polinomios $P = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$ y $Q = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + a.x^4 + b.x^5$, donde a y b son números, son iguales sólo si $a = 6$ y $b = 0$.

Si los coeficientes del polinomio se restringen a los números dígitos [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] entonces un polinomio no es otra cosa que el desarrollo de la expresión de un número en base “x”:

$$5x10^3 + 4x10^2 + 8x10^1 + 9x10^0 = 5489_{(10}$$
$$3x5^6 + 2x5^4 + 1x5^3 + 3x5^2 + 4x5^1 = 3021340_{(5}$$

En el segundo ejemplo los coeficientes se restringen al conjunto [0, 1, 2, 3, 4], que son los únicos símbolos necesarios para trabajar en base 5. Muchas civilizaciones primitivas trabajaban en base 5. Los mayas usaban la base 20. Los árabes fueron los primeros en adoptar la base 10.

Operaciones con polinomios

Con los polinomios es posible definir operaciones. De hecho, se pueden realizar con ellos todas las operaciones algebraicas. Y como un polinomio no es otra cosa que la suma, resta y producto de números y letras –que, como ya dijimos, representan números– entonces, todas las propiedades de los números son trasladables a los polinomios.

Así, el conjunto de los polinomios tiene *estructura de grupo* respecto de la suma. Se cumplen las propiedades de la suma: conmutativa, asociativa, existencia de neutro y existencia de opuesto. Para hallar el opuesto de un polinomio alcanza con cambiar todos los signos de sus coeficientes.

Ejemplo: Para sumar los polinomios $T = 3.x^3 - 2.x + 8$ y $R = 4.x^2 + 5.x - 6$ se procede como en el esquema que sigue (luego de ordenar y reducir los sumandos, si fuera necesario).

$$\begin{array}{rr} & 3.x^3 + 0.x^2 - 2.x + 8 \\ + & 4.x^2 + 5.x - 6 \\ \hline & 3.x^3 + 4.x^2 + 3.x + 2 \end{array}$$

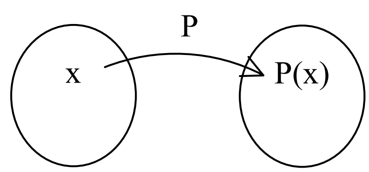
El producto de polinomios es una operación que verifica las propiedades conmutativa, asociativa y existencia de neutro –el neutro del producto es el polinomio 1– pero no se cumple la existencia de inverso. Por este motivo, el conjunto de los polinomios no tiene *estructura de cuerpo*. El inverso del polinomio (x + 1) es la expresión algebraica $\frac{1}{x+1}$, que no es un polinomio (no se puede escribir como suma o resta de monomios).

Para multiplicar dos polinomios se puede aplicar la propiedad distributiva generalizada. Ejemplo: para multiplicar $(3.x^2 + 2.x - 1)$ por $(x^3 - 2.x - 3)$ es necesario multiplicar cada monomio del primer factor por cada monomio del segundo factor, luego sumar todos los productos y reducir el resultado.

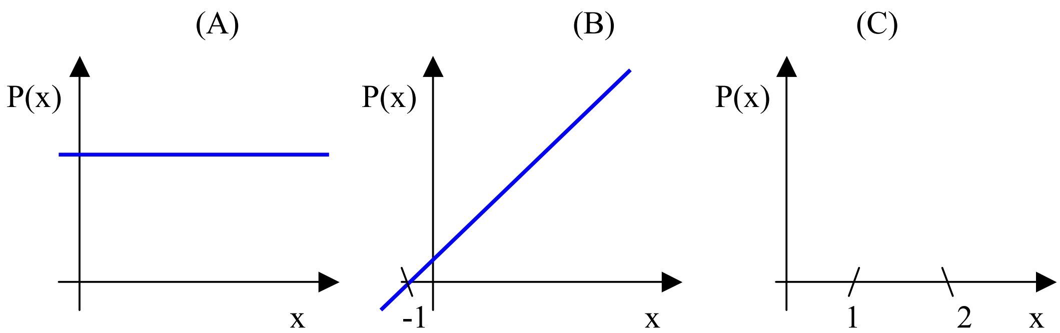
$$\begin{array}{lr} & 3.x^2 + 2.x - 1 \\ \mathbf{X} & x^3 - 2.x - 3 \\ \hline & 3.x^5 + 2.x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad \\ & - 6.x^3 - 4.x^2 + 2.x \qquad \\ & - 9.x^2 - 6.x + 3 \\ \hline & 3.x^5 + 2.x^4 - 7.x^3 - 13.x^2 - 4.x + 3 \end{array}$$

Función polinómica

A partir de la entidad polinomio es posible definir funciones de dominio y codominio reales, haciendo corresponder a cada número real "x" el valor que resulta de sustituir dicho número en P(x).



A estas funciones se las conoce como *polinómicas* y su gráfico suele ser bastante fácil de representar en un par de ejes cartesianos ortogonales cuando el grado del polinomio es bajo. En particular, cuando el polinomio es de grado 0 ó 1 el gráfico de la función polinómica es una recta, y cuando el grado es 2 el gráfico es una parábola.



Raíces del polinomio

Se denomina *raíz* de la función polinómica al valor de la indeterminada (en el lenguaje de funciones se le llama “variable”) que hace que el valor de la función polinómica sea nulo.

$$\alpha \text{ es raíz de } P \leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Gráficamente, la raíz de P es un valor de x donde el gráfico de la función corta al eje Ox. En el gráfico (A) no hay raíces, en el gráfico (B) la única raíz es $\alpha = -1$ y en el gráfico (C) la función polinómica tiene dos raíces: $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$.

Dado un polinomio, los problemas que pueden presentarse respecto de sus raíces son:

- cuántas raíces reales tiene
- cómo encontrar todas sus raíces reales
- cómo aproximarlas cuando son reales irracionales.

Estos problemas, que ya se habían planteado griegos y árabes a comienzos de nuestra era, recién tuvieron respuesta a partir del siglo XVI y siguientes. La propiedad más relevante sobre raíces de polinomios expresa: *Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.* El teorema proporciona una cota superior del número raíces, pero no resuelve los problemas arriba enunciados. Para encontrar las raíces reales existen varios métodos que permiten obtenerlas exactamente: el teorema de la raíz racional, la propiedad que relaciona coeficientes del polinomio con sus raíces, el teorema de la descomposición factorial y el método de Ruffini para “bajar” el grado del polinomio. Cuando las raíces son reales irracionales existen métodos para aproximarlas mediante números decimales prefijando el máximo error tolerable. En este curso no trataremos ninguno de estos métodos. Veremos sí algunos casos particulares.

Cuando el polinomio es de primer grado, siempre admite una raíz real (única).

$$P(x) = a + b.x$$

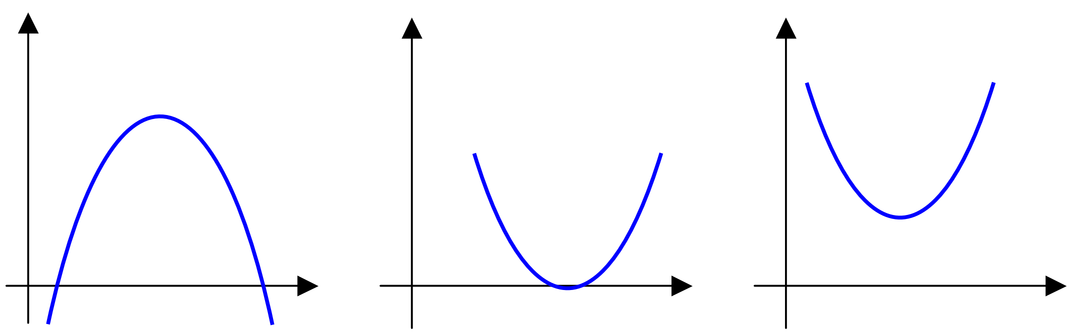
$$\alpha = -a/b$$

Cuando el polinomio es de segundo grado, admite raíces reales si la expresión denominada "discriminante" es mayor o igual que 0.

$$P(x) = a.x^2 + b.x + c$$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$ es el discriminante

Las expresiones $\alpha_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}$ y $\alpha_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}$ proporcionan las dos raíces de la función polinómica, en caso que Δ sea mayor que cero. Si $\Delta = 0$, entonces las dos raíces son iguales. Pero si el discriminante es negativo, entonces la función no tiene raíces. Estas situaciones se pueden visualizar gráficamente.



$\Delta > 0$ $\qquad$ $\Delta = 0$ $\qquad$ $\Delta < 0$

El coeficiente del monomio de grado 2 cumple un papel relevante en la forma del gráfico: si $a > 0$ entonces la parábola "mira" hacia arriba, y si $a < 0$ entonces los cuernos de la parábola miran hacia abajo.

De acuerdo con el Teorema de Descomposición Factorial, si α_1 y α_2 son las raíces del polinomio $P(x) = a.x^2 + b.x + c$, entonces el polinomio también se puede expresar así:

$$P(x) = a.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2)$$

Más en general, si el polinomio es de grado n y admite las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ y a_n es el coeficiente del monomio de mayor grado, entonces el polinomio puede expresarse como producto así:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3).....(x - \alpha_n)$$

Si el polinomio P es de grado n y admite sólo k raíces reales (k < n), entonces todavía P se puede factorizar así:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3).....(x - \alpha_k).\ Q(x)$$

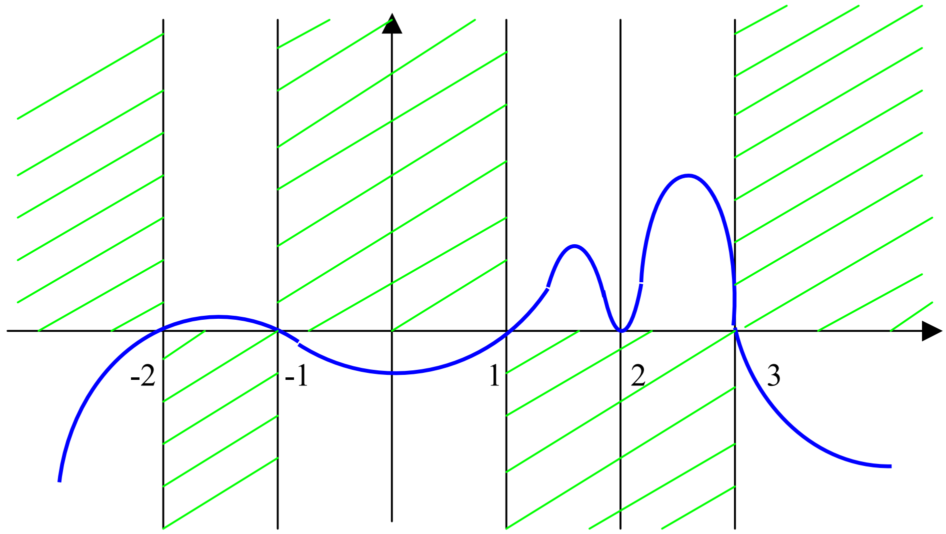
donde Q es un polinomio de grado (n – k). Se puede demostrar que el polinomio Q es de grado par (y que sus raíces son pares de números complejos conjugados).

Ejemplo: El polinomio P(x) es de grado 6, el monomio de 6º grado es (-4) y admite las raíces 1, 2, 2, 3, -1 y -2. Expresar el polinomio en forma factorial.

$$P(x) = -4.(x - 1).(x - 2).(x - 2).(x - 3).(x-(-1)).(x -(-2))$$
$$P(x) = -4.(x - 1).(x - 2)^2.(x - 3).(x +1).(x +2)$$

Signo del polinomio

¿Cómo es aproximadamente el gráfico de la función polinómica?



Las raíces de P son puntos de corte del gráfico con el eje Ox. Las raíces consecutivas determinan intervalos: (-∞, -2), (-2, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 3) y (3, +∞). Obsérvese que en esos intervalos el signo de P es o bien positivo o bien negativo (no hay cambios de signo dentro de esos intervalos). De acuerdo con el gráfico precedente, el esquema del signo de P es:

	-	0	+	0	-	0	+	0	+	0	-
Sgn P		-2		-1		1		2		3	

En el esquema se colocan todas las raíces y en los intervalos que éstas determinan se señala el signo del gráfico (+ ó – según corresponda). ¿Existe alguna regla general para hallar el signo de un polinomio de grado cualquiera? La respuesta es afirmativa si se conocen todas las raíces y el signo del coeficiente del monomio de más alto grado (a_n). En este caso el polinomio se puede factorizar y hallar el signo en cada intervalo mediante la regla del producto de números. Si se trabaja de derecha a izquierda, el primer intervalo tiene el signo de a_n. Al pasar de un intervalo al siguiente –siempre de derecha a izquierda– si la raíz es simple o de multiplicidad[2] impar, entonces se produce un cambio de signo al pasar al nuevo intervalo. Si la raíz es de multiplicidad par, entonces el nuevo intervalo mantiene el signo del contiguo a la derecha.

Fracciones algebraicas

El cociente de polinomios da origen a una nueva entidad matemática denominada *fracción algebraica*.

Definición: $F = \dfrac{P}{Q}$ es una fracción algebraica si P y Q son dos polinomios y Q no es el polinomio nulo.

Ejemplos: $\dfrac{2.x+1}{x^2-1}$; $\dfrac{1}{x+2}$; $\dfrac{x-3}{2}$; $\dfrac{4.x^3-2.x^2+8.x-1}{3.x^2-x-9}$.

El conjunto de las fracciones algebraicas tiene *estructura de cuerpo* pues el cociente de fracciones algebraicas es otra fracción algebraica, a condición que el denominador no sea la fracción nula.

La suma, resta, producto y cociente de fracciones algebraicas siguen las mismas reglas operatorias de las fracciones numéricas.

Ejemplos:

[2] Se denomina “multiplicidad” a la cantidad de veces que se repite la misma raíz en el polinomio. En el ejemplo precedente la raíz 2 es de multiplicidad 2, mientras que las restantes raíces son de multiplicidad 1.

$$a)\quad \frac{2.x}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+1)+(x+2).(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{3.x^2+3.x-2}{x^2-1}$$

$$b)\quad \frac{2.x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+1)-(x+2).(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{x^2+x+2}{x^2-1}$$

$$c)\quad \frac{2.x}{x-1}\times\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+2)}{(x-1).(x+1)}=\frac{2.x^2+4.x}{x^2-1}$$

$$d)\quad \frac{2.x}{x-1}\div\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x}{x-1}\times\frac{x+1}{x+2}=\frac{2.x.(x+1)}{(x-1).(x+2)}=\frac{2.x^2+2.x}{x^2+x-2}$$

¿Es posible definir nuevas funciones a partir de las fracciones algebraicas? Por ejemplo, consideremos la relación que a cada valor de “x” le asigna el valor de 2.x/(x-1). Si el dominio y el codominio son los números reales, entonces esta relación no es una función porque el valor x = 1 del dominio no tiene correspondiente en el codominio (pues para x = 1 se anula el denominador). Para que la relación $x \rightarrow 2.x/(x-1)$ sea una función, es necesario restringir el dominio eliminando el o los valores de x que hacen que la fracción tenga denominador nulo. En este ejemplo, x = 1 es el único valor que debe ser excluido del dominio de la función:

Dominio de F = D(F) = $\{x: x \in R \text{ y } x \neq 1\}$

¿Cómo es el gráfico de la función fracción algebraica? El gráfico es un poco más complicado que el de las funciones polinómicas, y este problema lo abordaremos más adelante. Pero sí podemos hallar el esquema del signo de F. Si F = P/Q, entonces resulta que Sgn F = Sgn (PxQ), excepto en los puntos tales que Q(x) = 0. En tales puntos no existe el signo de la fracción (recordar que tales puntos quedan excluidos del dominio de la función).

Ejemplo: Hallar el esquema del signo de F = $\dfrac{4.x^2-20.x+24}{x^2-4}$.

El polinomio del numerador tiene raíces $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$. El polinomio del denominador tiene raíces $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = -2$. El polinomio PxQ tiene las raíces -2, 2, 2 y 3 y su primer coeficiente es +4. En consecuencia:

Sgn PxQ	+	0	-	0	-	0	+	
		-2		2		3		x
Sgn F	+	∄	-	∄	-	0	+	
		-2		2		3		x

Productos notables

Sean P y Q dos polinomios. Se denomina *binomio* a las expresiones (P+Q) y (P-Q). Se denominan *productos notables* a las siguientes expresiones.

$(P+Q)^2 = P^2 + 2.P.Q + Q^2$
$(P–Q)^2 = P^2 - 2.P.Q + Q^2$
$(P+Q).(P–Q) = P^2 – Q^2$
$(P+Q)^3 = P^3 + 3.P^2.Q + 3.P.Q^2 + Q^3$

¿Y si fuera necesario elevar el binomio a un exponente más alto, por ejemplo, $(P+Q)^7$? Para resolver este problema existe un resultado general, conocido como el *desarrollo del binomio de Newton*[3]. Recordando el significado de la expresión “n factorial”, n!, y adoptando la notación $C_i^n = \dfrac{n!}{i!.(n-i)!}$ (que se lee “combinaciones de n en i”) se tiene el siguiente resultado:

$$(P+Q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n .P^i .Q^{n-i}$$

Ejemplos:

1. $(x^2 + 3.x)^2 = (x^2)^2 + 2.(x^2).(3.x) + (3.x)^2 = x^4 + 6.x^3 + 9.x^2$
2. $(x^2 +3.x)^5$

$$(x^2+3.x)^5 = C_0^5.(x^2)^0.(3.x)^5 + C_1^5.(x^2)^1.(3.x)^4 + C_2^5.(x^2)^2.(3.x)^3 +$$
$$C_3^5.(x^2)^3.(3.x)^2 + C_4^5.(x^2)^4.(3.x)^1 + C_5^5.(x^2)^5.(3.x)^0 =$$
$$= 243.x^5 + 405.x^6 + 270.x^7 + 90.x^8 + 15.x^9 + x^{10}$$

[3] Isaac Newton (1642-1727) físico, astrónomo y matemático inglés, famoso por su descubrimiento de las leyes de gravedad.

Repartido Práctico 4: Polinomios y expresiones algebraicas

Ejercicio 1

Sean los polinomios: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ y $S(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Calcular P + S.
b) Calcular $-2S$ y ½.S.
c) Calcular 3.P – 6.S.
d) Calcular P – (2x).S.
e) Calcular P.S.

Ejercicio 2

Hallar el desarrollo de:

a) $(x^2 - 2x)^2$
b) $(2x^3 - x)^2$
c) $(x^2 + \frac{1}{2}.x)^3$
d) $(x^2 - 2x).(x^2 + 2x)$

Ejercicio 3

Realizar las siguientes operaciones.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} =$
b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} =$
c) $\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x} =$
d) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} =$

Ejercicio 4

a) Hallar raíces y signo del polinomio $S(x) = x^2 + 2x - 3$.
b) Hallar raíces y signo de $T(x) = (x^2 - 2x)^2$.
c) Hallar raíces y signo de $M(x) = \frac{2x-5}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1}$.

Ejercicio 5

Escribir las siguientes expresiones como polinomios reducidos y ordenados.

a) $(2x+1)^4$
b) $(x^2 - 2x)^6$

5. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son conjuntos de números (cuando dependen de una sola variable) o cuyos dominios son conjuntos de pares, ternas, etc. (cuando las funciones dependen de dos, tres o más variables). En todos los casos, los codominios de las funciones son conjuntos de números.

Considérese una nueva entidad matemática llamada *ecuación* que tiene la forma

$$f = g$$

Si las funciones dependen de una sola variable, entonces $f(x) = g(x)$ es una ecuación "en x". Si las funciones dependen de de dos variables, entonces $f(x, y) = g(x, y)$ es una ecuación "en x e y"; en tres variables se tiene la ecuación $f(x, y, z) = g(x, y, z)$.

En polinomios las letras se conocen como "indeterminadas", en funciones se las denomina "variables", mientras que en ecuaciones se les llama "indeterminadas".

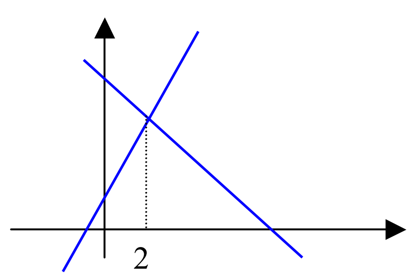
<u>Definición</u>: *Resolver la ecuación* $f = g$ consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de f y g que hacen que los valores de las funciones (las imágenes) coincidan. El conjunto de elementos que satisfacen la igualdad $f(x) = g(x)$, o bien las igualdades $f(x, y) = g(x, y)$ ó $f(x, y, z) = g(x, y, z)$, se denomina *conjunto solución de la ecuación* y cada elemento del conjunto solución se llama *raíz de la ecuación*.

Ejemplo 1: Si $f(x) = 2.x +1$ y $g(x) = -x + 7$, es fácil demostrar que la ecuación $2.x + 1 = -x + 7$ tiene por única raíz $x = 2$. El conjunto solución es $S = \{x: x = 2\}$.

Ejemplo 2: Si $f(x, y) = 3.x + 3.y$ y $g(x, y) = x + y + 2$, entonces la ecuación $3.x + 3.y = x + y + 2$ tiene como conjunto solución $S = \{(x, y): y = -x + 1\}$, el cual contiene infinitos pares de reales.

Desde el punto de vista geométrico, el conjunto solución de una ecuación es el conjunto de puntos (de la recta, del plano, del espacio de 3 dimensiones o de un hiperespacio) donde se intersectan los gráficos de las funciones f y g.

Así, en el Ejemplo 1, la única raíz (x = 2) es la abcisa del punto donde se intersectan las funciones $f(x) = 2.x +1$ y $g(x) = -x +7$, cuyos gráficos se representan por dos rectas en un par de ejes cartesianos ortogonales.



En el Ejemplo 2, los gráficos de las funciones $f(x, y) = 3.x + 3.y$ y $g(x, y) = x + y + 2$ se representan por dos planos en el espacio tridimensional. El conjunto solución $S = \{(x, y): y = -x + 1\}$ es el conjunto de los puntos de una recta en el plano bidimensional.

Consideremos ahora, en particular, las funciones de una sola variable, las que dan origen a ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$. Resolver la ecuación es encontrar los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad de las dos funciones.

Si f es un polinomio y $g(x) = 0$, entonces resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ equivale al problema de encontrar las raíces de un polinomio. Para resolver ecuaciones más generales es necesario enunciar algunas propiedades.

<u>Definición</u>: Dos ecuaciones son *equivalentes* si sus conjuntos solución son iguales.

Observación: si dos ecuaciones no tienen raíces, entonces son equivalentes, pues en ambos casos, el conjunto solución es el conjunto vacío.

Propiedades de las ecuaciones

1. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) + K = g(x) + K$ son equivalentes para todo K X R
2. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) – g(x) = 0$ son equivalentes
3. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $K.f(x) = K.g(x)$ son equivalentes para todo $K \neq 0$
4. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ son equivalentes si $h(x) \neq 0$ y se cumple que [D(f) W D(g)] T D(h)
5. La ecuación $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ tiene todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ a condición que [D(f) W D(g)] T D(h).
6. La ecuación $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ tiene todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$

Las reglas 5. y 6. se aplican cuando las ecuaciones $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ son más fáciles de resolver que la ecuación $f(x) = g(x)$. Pero en estos casos habrá que tener un cuidado especial porque las ecuaciones no son equivalentes y las primeras pueden tener raíces que no son raíces de $f(x) = g(x)$ (se pueden introducir "raíces extrañas"). Obtenidas las raíces de $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$, para resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ alcanzará con verificar cuáles de aquellas son también raíces de esta última.

Aplicando estas reglas, las ecuaciones en las que intervienen sólo polinomios, resultan equivalentes a ecuaciones de la forma $P(x) = 0$.

Como casos particulares tenemos:

$$a.x + b = 0$$
$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

cuya resolución ya hemos visto. En el segundo caso, las raíces se obtienen utilizando radicales.

Los casos $a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ y $a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e = 0$ también se pueden resolver por radicales (de índices 3 y 4), resultados obtenidos principalmente por la escuela matemática italiana[4] recién en el siglo XVI (la ecuación polinómica de segundo grado ya la habían resuelto los griegos de la antigüedad).

¿Qué puede decirse de las ecuaciones polinómicas de quinto grado o más, por ejemplo, $a.x^5 + b.x^4 + c.x^3 + d.x^2 + e.x + f = 0$? ¿También se pueden resolver por radicales? Recién en la tercera década del siglo XIX dos matemáticos muy jóvenes, Nils Abel[5] y Evariste Galois[6], aunque por métodos distintos, lograron demostrar que estas ecuaciones no pueden resolverse en general[7] mediante radicales.

Pero las ecuaciones pueden contener expresiones más complejas que los polinomios. Los siguientes son algunos ejemplos.

Ecuación con fracciones algebraicas	(E1) $\dfrac{3.x}{x-1} = \dfrac{2.x+1}{x+1}$
Ecuación con radicales	(E2) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2 - 4.x + 1}$
Ecuación trigonométrica	(E3) $\operatorname{sen}(x + \pi) = \cos^2(x + \pi)$
Ecuación logarítmica	(E4) $\log(x^2 + 9) = 1 + \log(x + 2)$

Para resolver (E1) se puede aplicar la propiedad 5 enunciada más arriba, multiplicando ambos miembros de la ecuación por la expresión $h(x) = (x - 1).(x + 1)$, obteniéndose la solución $S = \{0, -2\}$. Para resolver la (E2) se puede aplicar la propiedad 6, lo que conduce a una ecuación polinómica con solución $S = \{1, 4\}$. Sin embargo, la ecuación (E2) sólo admite como raíz $x = 4$, pues para $x = 1$ los radicandos son negativos y no están definidos en el campo real. La raíz $x = 1$ es "extraña" y se introdujo en el problema al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. No son objeto del curso la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas u otras más complicadas.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de las cuales interesan las raíces comunes. Sean $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots, S_k$ los conjuntos solución de de un sistema con K ecuaciones. *Resolver* un sistema de ecuaciones es encontrar la intersección de sus conjuntos solución.

Conjunto solución del sistema = $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \ldots\ldots \cap S_k$

Un sistema de ecuaciones es *lineal* cuando todas las funciones que intervienen en las ecuaciones son funciones polinómicas de hasta grado 1. Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones no lineales.

---

[4] Trabajaron en la solución de estos problemas Jerónimo Cardano (1501-1576) italiano, Nicolás Tartaglia (1499-1557) italiano, y Francisco Vieta (1540-1603) francés.
[5] Nils Abel (1802-1829) matemático noruego.
[6] Evariste Galois (1811-1832) matemático francés.
[7] Sí se pueden resolver por radicales algunos casos particulares. Por ejemplo, la ecuación $x^5 - 2 = 0$ tiene por única raíz real $x = \sqrt[5]{2}$.

$$\begin{cases} y = x^3 - 2.x \\ y = e^{2.x} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2 + 2.x + 3 \\ y = 2.x + 1 \end{cases}$$

La llave a la izquierda indica que el par de ecuaciones forma un sistema, esto es, que interesa encontrar el conjunto de pares (x, y) que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

Definición: Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si sus conjuntos solución son iguales.

Propiedades de los sistemas de ecuaciones

1. Si se aplican las propiedades 1 a 4 de ecuaciones a cualquiera de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
2. Si se cambia el orden de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
3. Si a una ecuación se le suma o resta un múltiplo de otra, se obtiene un sistema equivalente.
4. La forma de un sistema lineal con n incógnitas y m ecuaciones es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots\dots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots\dots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots\dots + a_{mn}.x_n = b_n \end{cases}$$

4.1. Si b_1, b_2, … , b_m son todos nulos, entonces el sistema lineal se dice homogéneo. Si el sistema lineal es homogéneo, entonces el conjunto solución no es vacío (siempre tiene raíces).

4.2. Todo sistema lineal de ecuaciones puede clasificarse en una y solo una de tres categorías:

a) *Sistema compatible determinado*: el conjunto solución tiene una única raíz.

b) *Sistema compatible indeterminado*: el conjunto solución admite infinitas raíces.

c) *Sistema incompatible*: el conjunto solución es el conjunto vacío.

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones se pueden utilizar varios métodos. La aplicación reiterada de la propiedad 3, generando ceros en los coeficientes a_{ij} por debajo de los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. es conocido como el *método de Gauss*[8] *o método de la escalera*.

[8] Carlos Federico Gauss (1777-1855) astrónomo, físico y matemático alemán. Fue apodado "Príncipe de la Matemática" por los colegas de su época. El gráfico de la función de densidad normal (estadística) se conoce como "campana de Gauss".

Ejemplo: Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ x+2y+z=7 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de la escalera. En primer lugar, vamos a colocar la segunda ecuación como primera, para facilitarnos los cálculos.

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 2x+3y-2z=1 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

A continuación, vamos a generar un cero en el primer coeficiente de la segunda ecuación, sumándole a la segunda ecuación la primera multiplicada por (-2).

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

En el siguiente paso, generamos un cero en el primer coeficiente de la tercera ecuación, sumándole a ésta la primera multiplicada por (-3).

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ -10y-4z=-22 \end{cases}$$

Se puede sumar a la tercera ecuación la segunda multiplicada por (-10) para generar un cero en el coeficiente de "y" en la tercera ecuación, y entonces se obtiene:

$$\begin{cases} x \quad +2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ 36z=108 \end{cases}$$

Ahora puede verse el sistema completamente escalerizado. En virtud de las propiedades enunciadas más arriba, este sistema es equivalente del primero, es decir, tiene el mismo conjunto solución. En el último peldaño de la escalera se puede despejar el valor de la incógnita z: z = 108/36 = 3. Si se sube un peldaño y se sustituye la z por el valor calculado, entonces se obtiene: - y – 4.3 = - 13, y despejando la y resulta: y = 1. Finalmente, subiendo un peldaño más se tiene: x + 2.1 + 3 = 7, y despejando la x resulta: x = 2. Encontramos una única raíz (x, y, z) = (2, 1, 3). Por tanto, el sistema es *compatible determinado*.

En el capítulo sobre Matrices volveremos sobre el método de Gauss, para resolver sistemas lineales, pero utilizando el enfoque matricial.

Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 1

Un capital de $1.000 es colocado a interés simple a la tasa del 3% mensual.

a) ¿Cuál es el interés generado al cabo de 6 meses?
b) ¿Cuál es el monto generado al cabo de 6 meses?
c) ¿Cuántos meses deberá permanecer colocado el capital para generar $195 de interés?

Ejercicio 2

Dos capitales, uno de $10.000 y otro de $15.000 son colocados a interés simple, el primero a la tasa del 4% y el segundo a la tasa del 2% mensual. ¿Al cabo de cuánto tiempo ambos capitales habrán generado el mismo monto?

Ejercicio 3

Un capital de $1.000 es colocado a interés compuesto a la tasa del 3% mensual efectivo.

a) Calcular el monto generado al cabo de un año.
b) Calcular el tiempo que debe permanecer colocado el capital hasta generar un monto de $1.500.
c) Otro capital de $1.200 es colocado al mismo momento, a una tasa del 5% mensual efectivo. ¿En qué momento se igualarán los dos montos?

Ejercicio 4

Un rectángulo tiene un perímetro de 960 mts. y un largo de 360 mts. ¿Cuál es el ancho?

Ejercicio 5

Un rectángulo tiene un área de 75 cms.^{2} y una base de 15 cms. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

Ejercicio 6

Las siguientes son dos reglas para determinar la dosis de un medicamento para un niño a partir de la dosis de un adulto.

<u>Regla de Young</u>

$$d = \frac{E}{E+12}.D$$

<u>Regla de Cowling</u>

$$d = \frac{E+1}{24}.D$$

donde: d = dosis para el niño
D= dosis para el adulto
E= edad del niño

a) Si un niño tiene 8 años y la dosis para el adulto es de 3 comprimidos por día, ¿cuál es la dosis para el niño según las reglas de Young y Cowling?
b) Si un niño tiene 12 años y la dosis para el adulto es de 2 comprimidos por día, ¿cuál es la dosis para el niño según las reglas de Young y Cowling?
c) ¿Para qué edades del niño coinciden las dosis para ambas reglas? (Redondear al año más cercano).

Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 7

Resolver la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{1}{120-x}=\frac{1}{24}$ redondeando la solución con un decimal.

Ejercicio 8

Un objeto es lanzado hacia arriba hasta que cae al piso. La altura (en metros) que describe el objeto desde que es lanzado hasta que cae al piso es $h = 50.t - 25.t^2$, donde t es el tiempo en segundos que transcurre desde el momento del lanzamiento.

a) ¿Cuánto tarda el objeto en tocar el piso?
b) ¿En qué momento alcanza el objeto su altura máxima?
c) ¿En qué momento, cuando está cayendo, se encuentra a 18,75 metros del piso?

Ejercicio 9

Un capital de $10.000 fue colocado durante 3 años a interés compuesto a una tasa efectiva anual del 25%. Al inicio del período el dólar costaba $10 y la tasa de devaluación en cada año fue del 12%, 15% y 18% respectivamente.

a) ¿Cuál fue la rentabilidad en dólares en cada año?
b) ¿Cuál fue la rentabilidad anual en dólares de la colocación?

Ejercicio 10

La canasta de consumo de un grupo de trabajadores aumentó en el año 1998 un 15% y en 1999 un 20%. En diciembre de 1997 el salario medio del grupo de trabajadores era de $5.000, que coincidía con el costo de una canasta de consumo. En 1998 y 1999 hubo los siguientes aumentos de salarios:

MES	AUMENTO
Enero/98	8%
Junio/98	8%
Enero/99	7%
Junio//99	7%

¿Cuántas canastas de consumo se pudieron comprar con los salarios medios de diciembre/98 y de diciembre/99?

Ejercicio 11

Un local de Policlínica funciona con los siguientes costos:

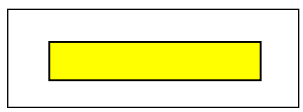
- El alquiler de $15.000 por mes
- El salario de un administrativo por $5.000
- Salarios médicos:
  - $20.000 de sueldos fijos de 5 médicos
  - $50 adicional por cada paciente por encima de los primeros 50 pacientes atendidos por cada médico

Si la orden a consultorio cuesta $150 y éste es el único ingreso del local, ¿cuántos pacientes deberán atender los 5 médicos para cubrir todos los costos de la Policlínica?

Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 12

Un terreno rectangular, de 4 mts. por 8 mts., será destinado como jardín (rectángulo exterior). Se decide poner una vereda en la orilla interior del rectángulo, de modo que las flores del jardín ocupen 12 mt^2 (rectángulo interior). ¿De qué ancho debe construirse la vereda?



Ejercicio 13

Una fábrica de cacao elabora chocolate en barras de 10x5x2 cm^3. A raíz de los aumentos en los costos, y con el ánimo de no incrementar los precios, la fábrica decide achicar el ancho y el largo de las barras en la misma longitud, manteniendo el grosor (2 cm) de forma que el volumen de la barra se reduzca un 10%. ¿Cuál será el ancho y el largo de la nueva barra? (Aproximar con dos decimales en cm)

Ejercicio 14

Un comerciante compró en la feria 20 Kg de naranjas a $12 el Kg. Más tarde encontró en otro puesto naranjas a $10 el Kg. ¿Cuántos Kg debe comprar a $10 para que el costo promedio de todas las naranjas compradas en la feria sea de $10,50?

Ejercicio 15

El costo de atender 20 camas diarias de Sanatorio es de $80.000, mientras que el costo de atender 30 camas diarias en el mismo Sanatorio es $110.000. ¿Cuál es el costo fijo diario y cuál es el costo variable unitario por día-cama?

Ejercicio 16

El Kg de helado de crema se vende a $50 y el de chocolate a $60. Se sabe que por cada 2 Kg de crema se venden 3 Kg de chocolate. ¿Cuántos Kg de crema y de chocolate hay que vender para recaudar $14.000?

Ejercicio 17

Una encuesta dirigida a 250 personas se realizó para conocer sus preferencias entre Coca y Pepsi. Entre las que contestaron, el 55% prefirió Coca. Si los que prefirieron Pepsi fueron 90, ¿cuántos no contestaron a la encuesta?

Ejercicio 18

Un vendedor cobra por mes un sueldo fijo más una comisión como porcentaje de las ventas que realiza. En un mes vendió $100.000 y cobró un salario total de $7.000. Al mes siguiente vendió $150.000 y obtuvo un salario de $8.000. ¿Cuál es el sueldo fijo y cuál el porcentaje de la comisión sobre las ventas?

Ejercicio 19

Demostrar que si un capital K se presta a interés compuesto en n cuotas iguales, mensuales y consecutivas, y la tasa de interés efectiva mensual es i, entonces, la cuota mensual a pagar se obtiene mediante la fórmula:

$$C = K * \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

6. INECUACIONES

Consideremos sólo el caso de funciones con una variable. Sean f y g dos funciones cuyos dominios y codominios son conjuntos de números. Considérese una nueva entidad matemática llamada *inecuación* que tiene alguna de las formas siguientes:

$$f \leq g$$
$$f < g$$
$$f \geq g$$
$$f > g$$

Definición: *Resolver la inecuación* $f \leq g$ (o alternativamente alguna de las otras) consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de f y g que satisfacen la desigualdad en los valores de las funciones. El conjunto de elementos que satisfacen la desigualdad se denomina *conjunto solución de la inecuación* y cada elemento del conjunto solución se denomina *raíz* de la inecuación.

$$S = \{x: f(x) \leq g(x)\}$$

Si α es tal que $f(\alpha) \leq g(\alpha)$, entonces α es una raíz de la inecuación.

Si en particular f es un polinomio y g es la función nula, entonces, resolver la inecuación $f \leq g$ (o cualquiera de las otras) es el problema de hallar el signo de f y determinar los puntos e intervalos sobre la recta donde el signo de f es menor o igual que 0.

Para resolver inecuaciones en general resultan útiles la siguiente definición y propiedades asociadas.

Definición: Dos inecuaciones son *equivalentes* si sus conjuntos solución son iguales.

Propiedades de las inecuaciones
(Aunque se utiliza el símbolo ≤, las propiedades son válidas también en los otros 3 casos)
1. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x) + K ≤ g(x) + K] son equivalentes para todo K
2. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x) – g(x) ≤ 0] son equivalentes
3. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [K.f(x) ≤ K.g(x)] son equivalentes para todo K > 0
4. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x).h(x) = g(x).h(x)] son equivalentes si h(x) > 0 y se cumple que [D(f) W D(g)] T D(h).
5. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [K.f(x) ≥ K.g(x)] son equivalentes para todo K < 0

Ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{3.x}{x-1}+1 \geq \frac{2.x+1}{x+1}$

Como primera observación, lo que no puede hacerse es "pasar multiplicando" los denominadores al otro miembro. Esto es válido en ecuaciones, según ya hemos visto, a riesgo de introducir raíces extrañas. Pero no es válido en inecuaciones, porque se podría estar multiplicando por expresiones negativas, y en tal caso, se pierde la equivalencia (observar cómo funciona la equivalencia en la propiedad 5).

Por la propiedad 2 la siguiente inecuación es equivalente de la primera.

$$\frac{3.x}{x-1}+1-\frac{2.x+1}{x+1} \geq 0$$

Operando con las expresiones algebraicas se obtiene:

$$\frac{3x(x+1)+(x-1)(x+1)-(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2+4x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x(x+2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Como la última inecuación es equivalente de la primera, la solución de ésta puede obtenerse resolviendo la última. El esquema de signo de la última inecuación es como sigue.

+	0	-	∄	+	0	-	∄	+
	-2		-1		0		1	

En consecuencia, el conjunto solución de la primera inecuación es:

S = {x: (x ≤ -2) ó (-1 < x ≤ 0) ó (x > 1)}

Repartido Práctico 6: Inecuaciones

Ejercicio 1

Sea la parábola de ecuación $y = 3.x^2 - 15.x + 18$. Encontrar los valores de x que hacen que la parábola se dibuje por encima del eje de las abcisas.

Ejercicio 2

Un presupuesto mensual de \$600 debe asignarse a una canasta de dos productos: pan y leche. El precio del pan es \$6 el Kg. y el precio de la leche es \$8 el litro. Plantear la restricción presupuestaria, graficarla e indicar cuántos Kg. de pan se pueden comprar si:

a) la canasta debe incluir 40 litros de leche
b) la canasta debe incluir 75 litros de leche
c) ese mes no se consume leche.

Ejercicio 3

Resolver la inecuación: $(x + 1).x^2.(x - 1)^3 \leq 0$.

Ejercicio 4

Resolver la inecuación: $(x^2 - 4).(9 - x^2) \geq 0$

Ejercicio 5

Resolver la inecuación: $\dfrac{x^2 - 3.x + 2}{x^2 - 2.x + 1} \geq 0$

Ejercicio 6

Resolver la inecuación: $\dfrac{x^2 - 2.x - 27}{x^2 + 2.x + 1} < 1$

Ejercicio 7

Resolver la inecuación: $e^x \geq x + 1$

4. POLINOMIOS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Monomios

Se conocen como *operaciones algebraicas*[1] a la suma, resta, multiplicación y división. Vamos a concentrarnos en primer lugar en las operaciones de suma, resta y multiplicación.

Definición: Se llama *monomio* al producto de números por letras. Los "números" pertenecen al conjunto de los reales y las "letras" son números desconocidos o "indeterminadas".

Así, son monomios:

3.x.8.x
y.5.y.y
z.z.x.y.x.3.z.z.z
y.x

Por convención, se acostumbra utilizar las últimas letras del alfabeto. Como las letras representan números, entonces es posible operar con ellos como si fueran números: valen para los monomios todas las propiedades del producto de números reales. Por eso, los ejemplos anteriores se pueden escribir colocando los números a la izquierda y las letras a la derecha, por ejemplo, en orden alfabético, en virtud de la propiedad conmutativa del producto de números:

$24.x^2$
$5.y^3$
$3.x^2.y.z^5$
$x.y$

En el monomio se pueden reconocer ciertas "partes":

- el *coeficiente*: es la parte numérica del monomio (24, 5, 3 y 1 en los ejemplos)
- la *parte literal*: es el producto de las indeterminadas (x^2, y^3, $x^2.y.z^5$, x.y en los ejemplos)
- el *grado* del monomio: es la cantidad de letras que figuran en la parte literal (2, 3, 8 y 2 en los ejemplos). Cuando el monomio es un número, no hay letras, el grado del monomio es cero.

[1] Álgebra proviene del árabe (*algiabr*) y se utiliza para denominar el estudio de operaciones y propiedades de ciertos entes representados por símbolos, generalmente letras. El origen del álgebra parece que debe situarse en India y Persia. Existen antecedentes entre los griegos (Diofanto, siglo III), aunque fueron los árabes quienes la introdujeron en Europa en el siglo IX.

Polinomios

Definición: Se llama *polinomio* a la suma o resta de monomios.

Son ejemplos de polinomios:

$24.x^2 - y^3$
$2.x^1$
$x^1 + y^1 + z^1$
$2.x^0 + 3.x^1 + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$
$x^4 + x^2 + x^0$

Los polinomios pueden depender de una o más indeterminadas (una o más letras). El *grado de un polinomio* es el mayor de los grados de sus monomios.

Ejemplos:
$gr(24.x^2 - y^3) = 3$
$gr(2.x^1) = 1$
$gr(x^1 + y^1 + z^1) = 1$
$gr(2.x^0 + 3.x^1 + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4) = 4$
$gr(x^4 + x^2 + x^0) = 4$

Definición: Un polinomio en varias indeterminadas es *homogéneo de grado n* si todos sus monomios son de grado n.

Ejemplos:

$x^3 + y^3$ es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2.x.y + y^2$ es homogéneo de grado 2
x^3 es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2.y$ no es un polinomio homogéneo.

Consideremos ahora polinomios en una sola indeterminada (sólo la letra x). Algunas simplificaciones en la notación. Cuando un monomio tiene coeficiente cero, entonces se lo elimina del polinomio. Cuando el grado de un monomio es 1, entonces no se escribe el exponente 1 ($3.x^1$ se escribe 3.x). El monomio $5.x^0$ se escribe simplemente 5.

Se dice que un polinomio (en una sola indeterminada) está *reducido* si todos sus monomios son de distinto grado.

Ejemplos:

$-3.x^5 + 5.x^3 - 2.x$ es un polinomio reducido
$2.x^4 + 4.x^2 - 5.x^4$ no es un polinomio reducido

Para obtener un polinomio reducido en el segundo ejemplo, alcanza con realizar la operación $2.x^4 - 5.x^4 = (2 - 5).x^4 = -3.x^4$.

Se dice que un polinomio está *ordenado* si los monomios aparecen en orden creciente o decreciente de sus grados.

Ejemplos:

$2 + 3.x + 4.x^2 - 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio ordenado

$$2.x^4 + 4.x^2 – 5.x^3$$ no es un polinomio ordenado

Se dice que un polinomio de grado n es *completo* si en su desarrollo figuran todos los monomios de grado menor o igual que n, con coeficientes diferentes de cero.

Ejemplos:

$2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio completo
$-3.x^5 + 5.x^3 – 2.x$ no es un polinomio completo (los monomios de grado 2 y de grado 0 tienen coeficiente 0)

El polinomio $2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$ es un polinomio reducido, ordenado y completo.

Los polinomios son entidades matemáticas –como lo son los números y los conjuntos–. Se acostumbra denominarlos con letras mayúsculas de nuestro alfabeto – como a los conjuntos– y cuando es necesario se explicita el nombre de la indeterminada.

$$P = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$$
$$P(x) = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$$

<u>Definición</u>: Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y, una vez reducidos y ordenados, tienen iguales todos los coeficientes respectivos.

Ejemplo: Los polinomios $P = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + 6.x^4$ y $Q = 2 + 3.x + 4.x^2 – 5.x^3 + a.x^4 + b.x^5$, donde a y b son números, son iguales sólo si $a = 6$ y $b = 0$.

Si los coeficientes del polinomio se restringen a los números dígitos [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] entonces un polinomio no es otra cosa que el desarrollo de la expresión de un número en base “x”:

$$5x10^3 + 4x10^2 + 8x10^1 + 9x10^0 = 5489_{(10}$$
$$3x5^6 + 2x5^4 + 1x5^3 + 3x5^2 + 4x5^1 = 3021340_{(5}$$

En el segundo ejemplo los coeficientes se restringen al conjunto [0, 1, 2, 3, 4], que son los únicos símbolos necesarios para trabajar en base 5. Muchas civilizaciones primitivas trabajaban en base 5. Los mayas usaban la base 20. Los árabes fueron los primeros en adoptar la base 10.

Operaciones con polinomios

Con los polinomios es posible definir operaciones. De hecho, se pueden realizar con ellos todas las operaciones algebraicas. Y como un polinomio no es otra cosa que la suma, resta y producto de números y letras –que, como ya dijimos, representan números– entonces, todas las propiedades de los números son trasladables a los polinomios.

Así, el conjunto de los polinomios tiene *estructura de grupo* respecto de la suma. Se cumplen las propiedades de la suma: conmutativa, asociativa, existencia de neutro y existencia de opuesto. Para hallar el opuesto de un polinomio alcanza con cambiar todos los signos de sus coeficientes.

Ejemplo: Para sumar los polinomios $T = 3.x^3 - 2.x + 8$ y $R = 4.x^2 + 5.x - 6$ se procede como en el esquema que sigue (luego de ordenar y reducir los sumandos, si fuera necesario).

$$\begin{array}{rr} & 3.x^3 + 0.x^2 - 2.x + 8 \\ + & 4.x^2 + 5.x - 6 \\ \hline & 3.x^3 + 4.x^2 + 3.x + 2 \end{array}$$

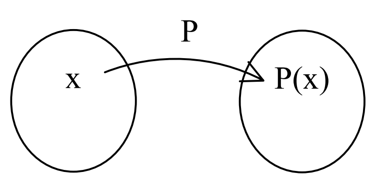
El producto de polinomios es una operación que verifica las propiedades conmutativa, asociativa y existencia de neutro –el neutro del producto es el polinomio 1– pero no se cumple la existencia de inverso. Por este motivo, el conjunto de los polinomios no tiene *estructura de cuerpo*. El inverso del polinomio (x + 1) es la expresión algebraica $\frac{1}{x+1}$, que no es un polinomio (no se puede escribir como suma o resta de monomios).

Para multiplicar dos polinomios se puede aplicar la propiedad distributiva generalizada. Ejemplo: para multiplicar $(3.x^2 + 2.x - 1)$ por $(x^3 - 2.x - 3)$ es necesario multiplicar cada monomio del primer factor por cada monomio del segundo factor, luego sumar todos los productos y reducir el resultado.

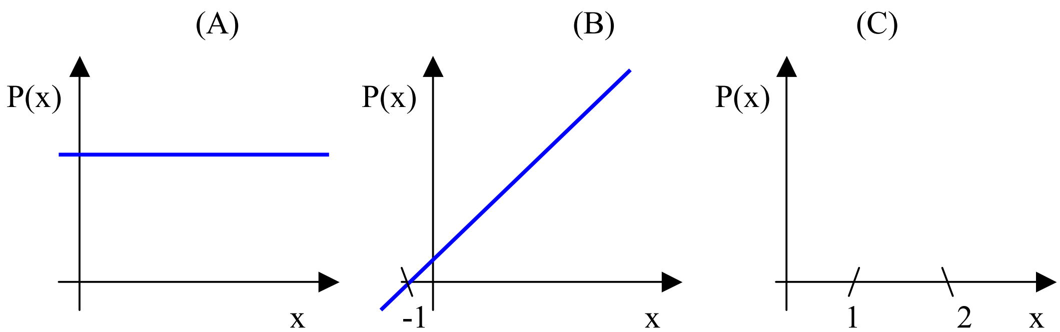
$$\begin{array}{l} \qquad 3.x^2 + 2.x - 1 \\ \mathbf{X} \qquad x^3 - 2.x - 3 \\ \hline 3.x^5 + 2.x^4 - x^3 \\ \qquad\qquad - 6.x^3 - 4.x^2 + 2.x \\ \qquad\qquad\qquad - 9.x^2 - 6.x + 3 \\ \hline 3.x^5 + 2.x^4 - 7.x^3 - 13.x^2 - 4.x + 3 \end{array}$$

Función polinómica

A partir de la entidad polinomio es posible definir funciones de dominio y codominio reales, haciendo corresponder a cada número real "x" el valor que resulta de sustituir dicho número en P(x).



A estas funciones se las conoce como *polinómicas* y su gráfico suele ser bastante fácil de representar en un par de ejes cartesianos ortogonales cuando el grado del polinomio es bajo. En particular, cuando el polinomio es de grado 0 ó 1 el gráfico de la función polinómica es una recta, y cuando el grado es 2 el gráfico es una parábola.



Raíces del polinomio

Se denomina *raíz* de la función polinómica al valor de la indeterminada (en el lenguaje de funciones se le llama “variable”) que hace que el valor de la función polinómica sea nulo.

$$\alpha \text{ es raíz de P} \leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Gráficamente, la raíz de P es un valor de x donde el gráfico de la función corta al eje Ox. En el gráfico (A) no hay raíces, en el gráfico (B) la única raíz es $\alpha = -1$ y en el gráfico (C) la función polinómica tiene dos raíces: $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$.

Dado un polinomio, los problemas que pueden presentarse respecto de sus raíces son:

- cuántas raíces reales tiene
- cómo encontrar todas sus raíces reales
- cómo aproximarlas cuando son reales irracionales.

Estos problemas, que ya se habían planteado griegos y árabes a comienzos de nuestra era, recién tuvieron respuesta a partir del siglo XVI y siguientes. La propiedad más relevante sobre raíces de polinomios expresa: *Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.* El teorema proporciona una cota superior del número raíces, pero no resuelve los problemas arriba enunciados. Para encontrar las raíces reales existen varios métodos que permiten obtenerlas exactamente: el teorema de la raíz racional, la propiedad que relaciona coeficientes del polinomio con sus raíces, el teorema de la descomposición factorial y el método de Ruffini para “bajar” el grado del polinomio. Cuando las raíces son reales irracionales existen métodos para aproximarlas mediante números decimales prefijando el máximo error tolerable. En este curso no trataremos ninguno de estos métodos. Veremos sí algunos casos particulares.

Cuando el polinomio es de primer grado, siempre admite una raíz real (única).

$$P(x) = a + b.x$$

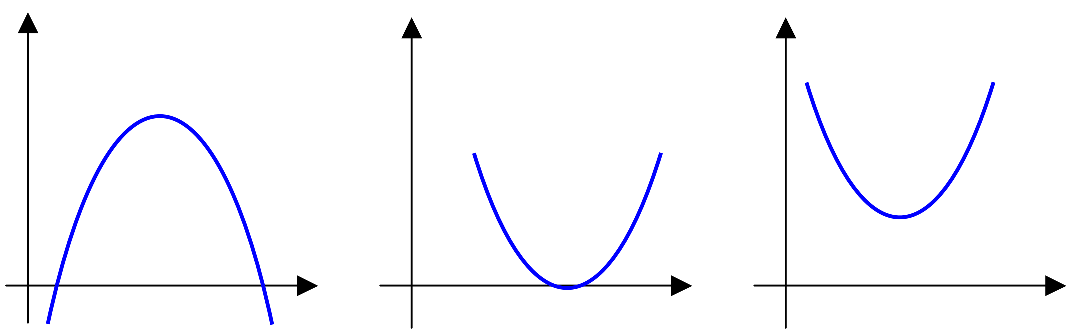
$$\alpha = -a/b$$

Cuando el polinomio es de segundo grado, admite raíces reales si la expresión denominada "discriminante" es mayor o igual que 0.

$$P(x) = a.x^2 + b.x + c$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \text{ es el discriminante}$$

Las expresiones $\alpha_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a}$ y $\alpha_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}$ proporcionan las dos raíces de la función polinómica, en caso que Δ sea mayor que cero. Si $\Delta = 0$, entonces las dos raíces son iguales. Pero si el discriminante es negativo, entonces la función no tiene raíces. Estas situaciones se pueden visualizar gráficamente.



$\Delta > 0$ $\qquad\qquad$ $\Delta = 0$ $\qquad\qquad$ $\Delta < 0$

El coeficiente del monomio de grado 2 cumple un papel relevante en la forma del gráfico: si $a > 0$ entonces la parábola "mira" hacia arriba, y si $a < 0$ entonces los cuernos de la parábola miran hacia abajo.

De acuerdo con el Teorema de Descomposición Factorial, si α_1 y α_2 son las raíces del polinomio $P(x) = a.x^2 + b.x + c$, entonces el polinomio también se puede expresar así:

$$P(x) = a.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2)$$

Más en general, si el polinomio es de grado n y admite las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ y a_n es el coeficiente del monomio de mayor grado, entonces el polinomio puede expresarse como producto así:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3).....(x - \alpha_n)$$

Si el polinomio P es de grado n y admite sólo k raíces reales (k < n), entonces todavía P se puede factorizar así:

$$P(x) = a_n.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3).....(x - \alpha_k).\ Q(x)$$

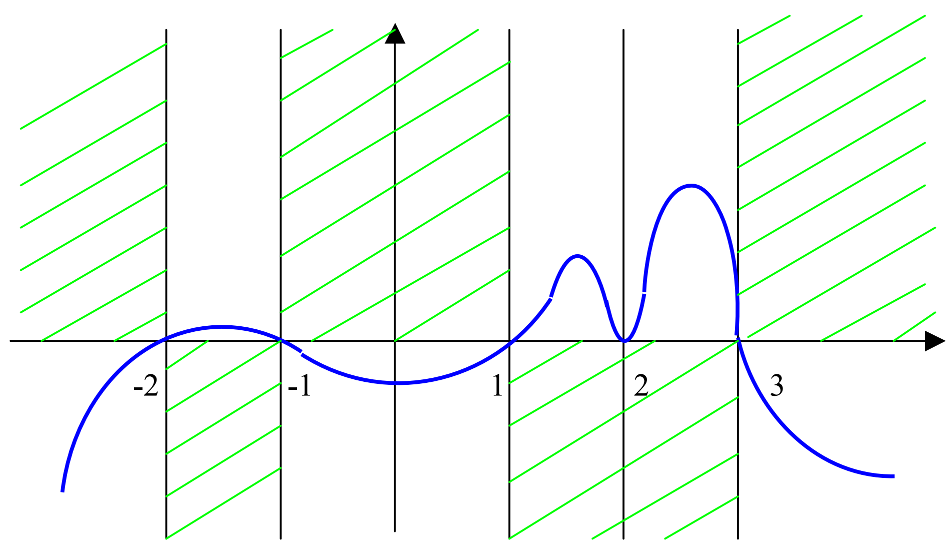
donde Q es un polinomio de grado (n – k). Se puede demostrar que el polinomio Q es de grado par (y que sus raíces son pares de números complejos conjugados).

Ejemplo: El polinomio P(x) es de grado 6, el monomio de 6º grado es (-4) y admite las raíces 1, 2, 2, 3, -1 y -2. Expresar el polinomio en forma factorial.

$$P(x) = -4.(x - 1).(x - 2).(x - 2).(x - 3).(x-(-1)).(x -(-2))$$
$$P(x) = -4.(x - 1).(x - 2)^2.(x - 3).(x +1).(x +2)$$

Signo del polinomio

¿Cómo es aproximadamente el gráfico de la función polinómica?



Las raíces de P son puntos de corte del gráfico con el eje Ox. Las raíces consecutivas determinan intervalos: (-∞, -2), (-2, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 3) y (3, +∞). Obsérvese que en esos intervalos el signo de P es o bien positivo o bien negativo (no hay cambios de signo dentro de esos intervalos). De acuerdo con el gráfico precedente, el esquema del signo de P es:

Sgn P	-	0	+	0	-	0	+	0	+	0	-
		-2		-1		1		2		3	

En el esquema se colocan todas las raíces y en los intervalos que éstas determinan se señala el signo del gráfico (+ ó – según corresponda). ¿Existe alguna regla general para hallar el signo de un polinomio de grado cualquiera? La respuesta es afirmativa si se conocen todas las raíces y el signo del coeficiente del monomio de más alto grado (a_n). En este caso el polinomio se puede factorizar y hallar el signo en cada intervalo mediante la regla del producto de números. Si se trabaja de derecha a izquierda, el primer intervalo tiene el signo de a_n. Al pasar de un intervalo al siguiente –siempre de derecha a izquierda– si la raíz es simple o de multiplicidad[2] impar, entonces se produce un cambio de signo al pasar al nuevo intervalo. Si la raíz es de multiplicidad par, entonces el nuevo intervalo mantiene el signo del contiguo a la derecha.

Fracciones algebraicas

El cociente de polinomios da origen a una nueva entidad matemática denominada *fracción algebraica*.

<u>Definición</u>: F = $\dfrac{P}{Q}$ es una fracción algebraica si P y Q son dos polinomios y Q no es el polinomio nulo.

Ejemplos: $\dfrac{2.x+1}{x^2-1}$; $\dfrac{1}{x+2}$; $\dfrac{x-3}{2}$; $\dfrac{4.x^3-2.x^2+8.x-1}{3.x^2-x-9}$.

El conjunto de las fracciones algebraicas tiene *estructura de cuerpo* pues el cociente de fracciones algebraicas es otra fracción algebraica, a condición que el denominador no sea la fracción nula.

La suma, resta, producto y cociente de fracciones algebraicas siguen las mismas reglas operatorias de las fracciones numéricas.

Ejemplos:

[2] Se denomina "multiplicidad" a la cantidad de veces que se repite la misma raíz en el polinomio. En el ejemplo precedente la raíz 2 es de multiplicidad 2, mientras que las restantes raíces son de multiplicidad 1.

$$a)\ \frac{2.x}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+1)+(x+2).(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{3.x^2+3.x-2}{x^2-1}$$

$$b)\ \frac{2.x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+1)-(x+2).(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{x^2+x+2}{x^2-1}$$

$$c)\ \frac{2.x}{x-1}\times\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x.(x+2)}{(x-1).(x+1)}=\frac{2.x^2+4.x}{x^2-1}$$

$$d)\ \frac{2.x}{x-1}\div\frac{x+2}{x+1}=\frac{2.x}{x-1}\times\frac{x+1}{x+2}=\frac{2.x.(x+1)}{(x-1).(x+2)}=\frac{2.x^2+2.x}{x^2+x-2}$$

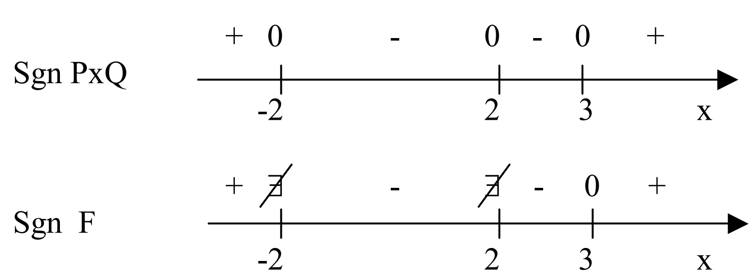
¿Es posible definir nuevas funciones a partir de las fracciones algebraicas? Por ejemplo, consideremos la relación que a cada valor de "x" le asigna el valor de 2.x/(x-1). Si el dominio y el codominio son los números reales, entonces esta relación no es una función porque el valor x = 1 del dominio no tiene correspondiente en el codominio (pues para x = 1 se anula el denominador). Para que la relación $x \to 2.x/(x-1)$ sea una función, es necesario restringir el dominio eliminando el o los valores de x que hacen que la fracción tenga denominador nulo. En este ejemplo, x = 1 es el único valor que debe ser excluido del dominio de la función:

$$\text{Dominio de F} = D(F) = \{x: x \in R \text{ y } x \neq 1\}$$

¿Cómo es el gráfico de la función fracción algebraica? El gráfico es un poco más complicado que el de las funciones polinómicas, y este problema lo abordaremos más adelante. Pero sí podemos hallar el esquema del signo de F. Si F = P/Q, entonces resulta que Sgn F = Sgn (PxQ), excepto en los puntos tales que Q(x) = 0. En tales puntos no existe el signo de la fracción (recordar que tales puntos quedan excluidos del dominio de la función).

Ejemplo: Hallar el esquema del signo de $F = \dfrac{4.x^2-20.x+24}{x^2-4}$.

El polinomio del numerador tiene raíces $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$. El polinomio del denominador tiene raíces $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = -2$. El polinomio PxQ tiene las raíces -2, 2, 2 y 3 y su primer coeficiente es +4. En consecuencia:



Productos notables

Sean P y Q dos polinomios. Se denomina *binomio* a las expresiones (P+Q) y (P-Q). Se denominan *productos notables* a las siguientes expresiones.

$$(P+Q)^2 = P^2 + 2.P.Q + Q^2$$
$$(P–Q)^2 = P^2 - 2.P.Q + Q^2$$
$$(P+Q).(P–Q) = P^2 – Q^2$$
$$(P+Q)^3 = P^3 + 3.P^2.Q + 3.P.Q^2 + Q^3$$

¿Y si fuera necesario elevar el binomio a un exponente más alto, por ejemplo, $(P+Q)^7$? Para resolver este problema existe un resultado general, conocido como el *desarrollo del binomio de Newton*[3]. Recordando el significado de la expresión "n factorial", n!, y adoptando la notación $C_i^n = \dfrac{n!}{i!.(n-i)!}$ (que se lee "combinaciones de n en i") se tiene el siguiente resultado:

$$(P+Q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n .P^i .Q^{n-i}$$

Ejemplos:

1. $(x^2 + 3.x)^2 = (x^2)^2 + 2.(x^2).(3.x) + (3.x)^2 = x^4 + 6.x^3 + 9.x^2$
2. $(x^2 +3.x)^5$

$$(x^2+3.x)^5 = C_0^5.(x^2)^0.(3.x)^5 + C_1^5.(x^2)^1.(3.x)^4 + C_2^5.(x^2)^2.(3.x)^3 +$$
$$C_3^5.(x^2)^3.(3.x)^2 + C_4^5.(x^2)^4.(3.x)^1 + C_5^5.(x^2)^5.(3.x)^0 =$$
$$= 243.x^5 + 405.x^6 + 270.x^7 + 90.x^8 + 15.x^9 + x^{10}$$

[3] Isaac Newton (1642-1727) físico, astrónomo y matemático inglés, famoso por su descubrimiento de las leyes de gravedad.

Repartido Práctico 4: Polinomios y expresiones algebraicas

Ejercicio 1

Sean los polinomios: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ y $S(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Calcular $P + S$.
b) Calcular $-2S$ y $½.S$.
c) Calcular $3.P - 6.S$.
d) Calcular $P - (2x).S$.
e) Calcular $P.S$.

Ejercicio 2

Hallar el desarrollo de:

a) $(x^2 - 2x)^2$
b) $(2x^3 - x)^2$
c) $(x^2 + ½.x)^3$
d) $(x^2 - 2x).\,(x^2 + 2x)$

Ejercicio 3

Realizar las siguientes operaciones.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} =$

b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} =$

c) $\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x} =$

d) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} =$

Ejercicio 4

a) Hallar raíces y signo del polinomio $S(x) = x^2 + 2x - 3$.
b) Hallar raíces y signo de $T(x) = (x^2 - 2x)^2$.
c) Hallar raíces y signo de $M(x) = \frac{2x-5}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1}$.

Ejercicio 5

Escribir las siguientes expresiones como polinomios reducidos y ordenados.

a) $(2x+1)^4$
b) $(x^2 - 2x)^6$

5. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son conjuntos de números (cuando dependen de una sola variable) o cuyos dominios son conjuntos de pares, ternas, etc. (cuando las funciones dependen de dos, tres o más variables). En todos los casos, los codominios de las funciones son conjuntos de números.

Considérese una nueva entidad matemática llamada *ecuación* que tiene la forma

$$f = g$$

Si las funciones dependen de una sola variable, entonces $f(x) = g(x)$ es una ecuación "en x". Si las funciones dependen de de dos variables, entonces $f(x, y) = g(x, y)$ es una ecuación "en x e y"; en tres variables se tiene la ecuación $f(x, y, z) = g(x, y, z)$.

En polinomios las letras se conocen como "indeterminadas", en funciones se las denomina "variables", mientras que en ecuaciones se les llama "indeterminadas".

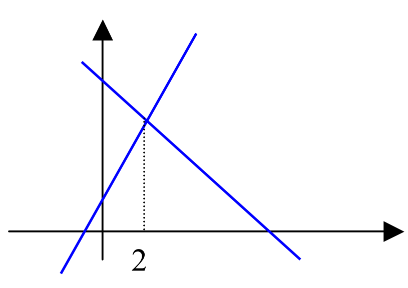
<u>Definición</u>: *Resolver la ecuación* $f = g$ consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de f y g que hacen que los valores de las funciones (las imágenes) coincidan. El conjunto de elementos que satisfacen la igualdad $f(x) = g(x)$, o bien las igualdades $f(x, y) = g(x, y)$ ó $f(x, y, z) = g(x, y, z)$, se denomina *conjunto solución de la ecuación* y cada elemento del conjunto solución se llama *raíz de la ecuación*.

Ejemplo 1: Si $f(x) = 2.x +1$ y $g(x) = -x + 7$, es fácil demostrar que la ecuación $2.x + 1 = -x + 7$ tiene por única raíz $x = 2$. El conjunto solución es $S = \{x: x = 2\}$.

Ejemplo 2: Si $f(x, y) = 3.x + 3.y$ y $g(x, y) = x + y + 2$, entonces la ecuación $3.x + 3.y = x + y + 2$ tiene como conjunto solución $S = \{(x, y): y = -x + 1\}$, el cual contiene infinitos pares de reales.

Desde el punto de vista geométrico, el conjunto solución de una ecuación es el conjunto de puntos (de la recta, del plano, del espacio de 3 dimensiones o de un hiperespacio) donde se intersectan los gráficos de las funciones f y g.

Así, en el Ejemplo 1, la única raíz (x = 2) es la abcisa del punto donde se intersectan las funciones $f(x) = 2.x +1$ y $g(x) = -x +7$, cuyos gráficos se representan por dos rectas en un par de ejes cartesianos ortogonales.



En el Ejemplo 2, los gráficos de las funciones $f(x, y) = 3.x + 3.y$ y $g(x, y) = x + y + 2$ se representan por dos planos en el espacio tridimensional. El conjunto solución $S = \{(x, y): y = -x + 1\}$ es el conjunto de los puntos de una recta en el plano bidimensional.

Consideremos ahora, en particular, las funciones de una sola variable, las que dan origen a ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$. Resolver la ecuación es encontrar los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad de las dos funciones.

Si f es un polinomio y $g(x) = 0$, entonces resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ equivale al problema de encontrar las raíces de un polinomio. Para resolver ecuaciones más generales es necesario enunciar algunas propiedades.

Definición: Dos ecuaciones son *equivalentes* si sus conjuntos solución son iguales.

Observación: si dos ecuaciones no tienen raíces, entonces son equivalentes, pues en ambos casos, el conjunto solución es el conjunto vacío.

Propiedades de las ecuaciones

1. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) + K = g(x) + K$ son equivalentes para todo K X R
2. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) - g(x) = 0$ son equivalentes
3. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $K.f(x) = K.g(x)$ son equivalentes para todo $K \neq 0$
4. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ son equivalentes si $h(x) \neq 0$ y se cumple que [D(f) W D(g)] T D(h)
5. La ecuación $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ tiene todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ a condición que [D(f) W D(g)] T D(h).
6. La ecuación $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ tiene todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$

Las reglas 5. y 6. se aplican cuando las ecuaciones $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ son más fáciles de resolver que la ecuación $f(x) = g(x)$. Pero en estos casos habrá que tener un cuidado especial porque las ecuaciones no son equivalentes y las primeras pueden tener raíces que no son raíces de $f(x) = g(x)$ (se pueden introducir "raíces extrañas"). Obtenidas las raíces de $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$, para resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ alcanzará con verificar cuáles de aquellas son también raíces de esta última.

Aplicando estas reglas, las ecuaciones en las que intervienen sólo polinomios, resultan equivalentes a ecuaciones de la forma $P(x) = 0$.

Como casos particulares tenemos:

$$a.x + b = 0$$
$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

cuya resolución ya hemos visto. En el segundo caso, las raíces se obtienen utilizando radicales.

Los casos $a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ y $a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e = 0$ también se pueden resolver por radicales (de índices 3 y 4), resultados obtenidos principalmente por la escuela matemática italiana[4] recién en el siglo XVI (la ecuación polinómica de segundo grado ya la habían resuelto los griegos de la antigüedad).

¿Qué puede decirse de las ecuaciones polinómicas de quinto grado o más, por ejemplo, $a.x^5 + b.x^4 + c.x^3 + d.x^2 + e.x + f = 0$? ¿También se pueden resolver por radicales? Recién en la tercera década del siglo XIX dos matemáticos muy jóvenes, Nils Abel[5] y Evariste Galois[6], aunque por métodos distintos, lograron demostrar que estas ecuaciones no pueden resolverse en general[7] mediante radicales.

Pero las ecuaciones pueden contener expresiones más complejas que los polinomios. Los siguientes son algunos ejemplos.

Ecuación con fracciones algebraicas (E1) $\dfrac{3.x}{x-1} = \dfrac{2.x+1}{x+1}$

Ecuación con radicales (E2) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2 - 4.x + 1}$

Ecuación trigonométrica (E3) $\operatorname{sen}(x + \pi) = \cos^2(x + \pi)$

Ecuación logarítmica (E4) $\log(x^2 + 9) = 1 + \log(x + 2)$

Para resolver (E1) se puede aplicar la propiedad 5 enunciada más arriba, multiplicando ambos miembros de la ecuación por la expresión $h(x) = (x - 1).(x + 1)$, obteniéndose la solución $S = \{0, -2\}$. Para resolver la (E2) se puede aplicar la propiedad 6, lo que conduce a una ecuación polinómica con solución $S = \{1, 4\}$. Sin embargo, la ecuación (E2) sólo admite como raíz $x = 4$, pues para $x = 1$ los radicandos son negativos y no están definidos en el campo real. La raíz $x = 1$ es "extraña" y se introdujo en el problema al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. No son objeto del curso la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas u otras más complicadas.

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de las cuales interesan las raíces comunes. Sean S_1, S_2, S_3,……, S_k los conjuntos solución de de un sistema con K ecuaciones. *Resolver* un sistema de ecuaciones es encontrar la intersección de sus conjuntos solución.

Conjunto solución del sistema = S = S_1 W S_2 W S_3 W……W S_k

Un sistema de ecuaciones es *lineal* cuando todas las funciones que intervienen en las ecuaciones son funciones polinómicas de hasta grado 1. Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones no lineales.

---

[4] Trabajaron en la solución de estos problemas Jerónimo Cardano (1501-1576) italiano, Nicolás Tartaglia (1499-1557) italiano, y Francisco Vieta (1540-1603) francés.

[5] Nils Abel (1802-1829) matemático noruego.

[6] Evariste Galois (1811-1832) matemático francés.

[7] Sí se pueden resolver por radicales algunos casos particulares. Por ejemplo, la ecuación $x^5 - 2 = 0$ tiene por única raíz real $x = \sqrt[5]{2}$.

$$\begin{cases} y = x^3 - 2.x \\ y = e^{2.x} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2 + 2.x + 3 \\ y = 2.x + 1 \end{cases}$$

La llave a la izquierda indica que el par de ecuaciones forma un sistema, esto es, que interesa encontrar el conjunto de pares (x, y) que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

<u>Definición</u>: Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si sus conjuntos solución son iguales.

Propiedades de los sistemas de ecuaciones

1. Si se aplican las propiedades 1 a 4 de ecuaciones a cualquiera de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
2. Si se cambia el orden de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
3. Si a una ecuación se le suma o resta un múltiplo de otra, se obtiene un sistema equivalente.
4. La forma de un sistema lineal con n incógnitas y m ecuaciones es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \ldots\ldots.. + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \ldots\ldots.. + a_{mn}.x_n = b_n \end{cases}$$

4.1. Si b_1, b_2, … , b_m son todos nulos, entonces el sistema lineal se dice homogéneo. Si el sistema lineal es homogéneo, entonces el conjunto solución no es vacío (siempre tiene raíces).

4.2. Todo sistema lineal de ecuaciones puede clasificarse en una y solo una de tres categorías:

a) *Sistema compatible determinado*: el conjunto solución tiene una única raíz.

b) *Sistema compatible indeterminado*: el conjunto solución admite infinitas raíces.

c) *Sistema incompatible*: el conjunto solución es el conjunto vacío.

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones se pueden utilizar varios métodos. La aplicación reiterada de la propiedad 3, generando ceros en los coeficientes a_{ij} por debajo de los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. es conocido como el *método de Gauss*[8] *o método de la escalera*.

---

[8] Carlos Federico Gauss (1777-1855) astrónomo, físico y matemático alemán. Fue apodado "Príncipe de la Matemática" por los colegas de su época. El gráfico de la función de densidad normal (estadística) se conoce como "campana de Gauss".

Ejemplo: Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=1 \\ x+2y+z=7 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de la escalera. En primer lugar, vamos a colocar la segunda ecuación como primera, para facilitarnos los cálculos.

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 2x+3y-2z=1 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

A continuación, vamos a generar un cero en el primer coeficiente de la segunda ecuación, sumándole a la segunda ecuación la primera multiplicada por (-2).

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ 3x-4y-z=-1 \end{cases}$$

En el siguiente paso, generamos un cero en el primer coeficiente de la tercera ecuación, sumándole a ésta la primera multiplicada por (-3).

$$\begin{cases} x+2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ -10y-4z=-22 \end{cases}$$

Se puede sumar a la tercera ecuación la segunda multiplicada por (-10) para generar un cero en el coeficiente de "y" en la tercera ecuación, y entonces se obtiene:

$$\begin{cases} x \quad +2y+z=7 \\ -y-4z=-13 \\ 36z=108 \end{cases}$$

Ahora puede verse el sistema completamente escalerizado. En virtud de las propiedades enunciadas más arriba, este sistema es equivalente del primero, es decir, tiene el mismo conjunto solución. En el último peldaño de la escalera se puede despejar el valor de la incógnita z: z = 108/36 = 3. Si se sube un peldaño y se sustituye la z por el valor calculado, entonces se obtiene: - y – 4.3 = - 13, y despejando la y resulta: y = 1. Finalmente, subiendo un peldaño más se tiene: x + 2.1 + 3 = 7, y despejando la x resulta: x = 2. Encontramos una única raíz (x, y, z) = (2, 1, 3). Por tanto, el sistema es *compatible determinado*.

En el capítulo sobre Matrices volveremos sobre el método de Gauss, para resolver sistemas lineales, pero utilizando el enfoque matricial.

Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 1

Un capital de $1.000 es colocado a interés simple a la tasa del 3% mensual.

a) ¿Cuál es el interés generado al cabo de 6 meses?
b) ¿Cuál es el monto generado al cabo de 6 meses?
c) ¿Cuántos meses deberá permanecer colocado el capital para generar $195 de interés?

Ejercicio 2

Dos capitales, uno de $10.000 y otro de $15.000 son colocados a interés simple, el primero a la tasa del 4% y el segundo a la tasa del 2% mensual. ¿Al cabo de cuánto tiempo ambos capitales habrán generado el mismo monto?

Ejercicio 3

Un capital de $1.000 es colocado a interés compuesto a la tasa del 3% mensual efectivo.

a) Calcular el monto generado al cabo de un año.
b) Calcular el tiempo que debe permanecer colocado el capital hasta generar un monto de $1.500.
c) Otro capital de $1.200 es colocado al mismo momento, a una tasa del 5% mensual efectivo. ¿En qué momento se igualarán los dos montos?

Ejercicio 4

Un rectángulo tiene un perímetro de 960 mts. y un largo de 360 mts. ¿Cuál es el ancho?

Ejercicio 5

Un rectángulo tiene un área de 75 cms.^{2} y una base de 15 cms. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

Ejercicio 6

Las siguientes son dos reglas para determinar la dosis de un medicamento para un niño a partir de la dosis de un adulto.

<u>Regla de Young</u>

$$d = \frac{E}{E+12}.D$$

<u>Regla de Cowling</u>

$$d = \frac{E+1}{24}.D$$

donde: d = dosis para el niño
D= dosis para el adulto
E= edad del niño

a) Si un niño tiene 8 años y la dosis para el adulto es de 3 comprimidos por día, ¿cuál es la dosis para el niño según las reglas de Young y Cowling?
b) Si un niño tiene 12 años y la dosis para el adulto es de 2 comprimidos por día, ¿cuál es la dosis para el niño según las reglas de Young y Cowling?
c) ¿Para qué edades del niño coinciden las dosis para ambas reglas? (Redondear al año más cercano).

Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 7

Resolver la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{1}{120-x}=\frac{1}{24}$ redondeando la solución con un decimal.

Ejercicio 8

Un objeto es lanzado hacia arriba hasta que cae al piso. La altura (en metros) que describe el objeto desde que es lanzado hasta que cae al piso es $h = 50.t - 25.t^2$, donde t es el tiempo en segundos que transcurre desde el momento del lanzamiento.

a) ¿Cuánto tarda el objeto en tocar el piso?
b) ¿En qué momento alcanza el objeto su altura máxima?
c) ¿En qué momento, cuando está cayendo, se encuentra a 18,75 metros del piso?

Ejercicio 9

Un capital de $10.000 fue colocado durante 3 años a interés compuesto a una tasa efectiva anual del 25%. Al inicio del período el dólar costaba $10 y la tasa de devaluación en cada año fue del 12%, 15% y 18% respectivamente.

a) ¿Cuál fue la rentabilidad en dólares en cada año?
b) ¿Cuál fue la rentabilidad anual en dólares de la colocación?

Ejercicio 10

La canasta de consumo de un grupo de trabajadores aumentó en el año 1998 un 15% y en 1999 un 20%. En diciembre de 1997 el salario medio del grupo de trabajadores era de $5.000, que coincidía con el costo de una canasta de consumo. En 1998 y 1999 hubo los siguientes aumentos de salarios:

MES	AUMENTO
Enero/98	8%
Junio/98	8%
Enero/99	7%
Junio//99	7%

¿Cuántas canastas de consumo se pudieron comprar con los salarios medios de diciembre/98 y de diciembre/99?

Ejercicio 11

Un local de Policlínica funciona con los siguientes costos:

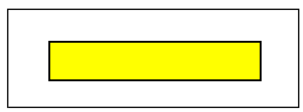
- El alquiler de $15.000 por mes
- El salario de un administrativo por $5.000
- Salarios médicos:
    - $20.000 de sueldos fijos de 5 médicos
    - $50 adicional por cada paciente por encima de los primeros 50 pacientes atendidos por cada médico

Si la orden a consultorio cuesta $150 y éste es el único ingreso del local, ¿cuántos pacientes deberán atender los 5 médicos para cubrir todos los costos de la Policlínica?

Repartido Práctico 5: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones

Ejercicio 12

Un terreno rectangular, de 4 mts. por 8 mts., será destinado como jardín (rectángulo exterior). Se decide poner una vereda en la orilla interior del rectángulo, de modo que las flores del jardín ocupen 12 mt^2 (rectángulo interior). ¿De qué ancho debe construirse la vereda?



Ejercicio 13

Una fábrica de cacao elabora chocolate en barras de 10x5x2 cm^3. A raíz de los aumentos en los costos, y con el ánimo de no incrementar los precios, la fábrica decide achicar el ancho y el largo de las barras en la misma longitud, manteniendo el grosor (2 cm) de forma que el volumen de la barra se reduzca un 10%. ¿Cuál será el ancho y el largo de la nueva barra? (Aproximar con dos decimales en cm)

Ejercicio 14

Un comerciante compró en la feria 20 Kg de naranjas a $12 el Kg. Más tarde encontró en otro puesto naranjas a $10 el Kg. ¿Cuántos Kg debe comprar a $10 para que el costo promedio de todas las naranjas compradas en la feria sea de $10,50?

Ejercicio 15

El costo de atender 20 camas diarias de Sanatorio es de $80.000, mientras que el costo de atender 30 camas diarias en el mismo Sanatorio es $110.000. ¿Cuál es el costo fijo diario y cuál es el costo variable unitario por día-cama?

Ejercicio 16

El Kg de helado de crema se vende a $50 y el de chocolate a $60. Se sabe que por cada 2 Kg de crema se venden 3 Kg de chocolate. ¿Cuántos Kg de crema y de chocolate hay que vender para recaudar $14.000?

Ejercicio 17

Una encuesta dirigida a 250 personas se realizó para conocer sus preferencias entre Coca y Pepsi. Entre las que contestaron, el 55% prefirió Coca. Si los que prefirieron Pepsi fueron 90, ¿cuántos no contestaron a la encuesta?

Ejercicio 18

Un vendedor cobra por mes un sueldo fijo más una comisión como porcentaje de las ventas que realiza. En un mes vendió \$100.000 y cobró un salario total de \$7.000. Al mes siguiente vendió \$150.000 y obtuvo un salario de \$8.000. ¿Cuál es el sueldo fijo y cuál el porcentaje de la comisión sobre las ventas?

Ejercicio 19

Demostrar que si un capital K se presta a interés compuesto en n cuotas iguales, mensuales y consecutivas, y la tasa de interés efectiva mensual es i, entonces, la cuota mensual a pagar se obtiene mediante la fórmula:

$$C = K * \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

6. INECUACIONES

Consideremos sólo el caso de funciones con una variable. Sean f y g dos funciones cuyos dominios y codominios son conjuntos de números. Considérese una nueva entidad matemática llamada *inecuación* que tiene alguna de las formas siguientes:

$$f \leq g$$
$$f < g$$
$$f \geq g$$
$$f > g$$

Definición: *Resolver la inecuación* $f \leq g$ (o alternativamente alguna de las otras) consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de f y g que satisfacen la desigualdad en los valores de las funciones. El conjunto de elementos que satisfacen la desigualdad se denomina *conjunto solución de la inecuación* y cada elemento del conjunto solución se denomina *raíz* de la inecuación.

$$S = \{x: f(x) \leq g(x)\}$$

Si α es tal que $f(\alpha) \leq g(\alpha)$, entonces α es una raíz de la inecuación.

Si en particular f es un polinomio y g es la función nula, entonces, resolver la inecuación $f \leq g$ (o cualquiera de las otras) es el problema de hallar el signo de f y determinar los puntos e intervalos sobre la recta donde el signo de f es menor o igual que 0.

Para resolver inecuaciones en general resultan útiles la siguiente definición y propiedades asociadas.

Definición: Dos inecuaciones son *equivalentes* si sus conjuntos solución son iguales.

Propiedades de las inecuaciones
(Aunque se utiliza el símbolo ≤, las propiedades son válidas también en los otros 3 casos)
1. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x) + K ≤ g(x) + K] son equivalentes para todo K
2. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x) – g(x) ≤ 0] son equivalentes
3. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [K.f(x) ≤ K.g(x)] son equivalentes para todo K > 0
4. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [f(x).h(x) = g(x).h(x)] son equivalentes si h(x) > 0 y se cumple que [D(f) W D(g)] T D(h).
5. Las inecuaciones [f(x) ≤ g(x)] y [K.f(x) ≥ K.g(x)] son equivalentes para todo K < 0

Ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{3.x}{x-1}+1 \geq \frac{2.x+1}{x+1}$

Como primera observación, lo que no puede hacerse es "pasar multiplicando" los denominadores al otro miembro. Esto es válido en ecuaciones, según ya hemos visto, a riesgo de introducir raíces extrañas. Pero no es válido en inecuaciones, porque se podría estar multiplicando por expresiones negativas, y en tal caso, se pierde la equivalencia (observar cómo funciona la equivalencia en la propiedad 5).

Por la propiedad 2 la siguiente inecuación es equivalente de la primera.

$$\frac{3.x}{x-1}+1-\frac{2.x+1}{x+1} \geq 0$$

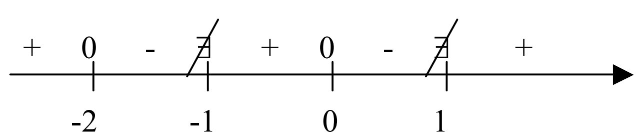
Operando con las expresiones algebraicas se obtiene:

$$\frac{3x(x+1)+(x-1)(x+1)-(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2+4x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x(x+2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Como la última inecuación es equivalente de la primera, la solución de ésta puede obtenerse resolviendo la última. El esquema de signo de la última inecuación es como sigue.



En consecuencia, el conjunto solución de la primera inecuación es:

S = {x: (x ≤ -2) ó (-1 < x ≤ 0) ó (x > 1)}

Repartido Práctico 6: Inecuaciones

Ejercicio 1

Sea la parábola de ecuación $y = 3.x^2 - 15.x + 18$. Encontrar los valores de x que hacen que la parábola se dibuje por encima del eje de las abcisas.

Ejercicio 2

Un presupuesto mensual de \$600 debe asignarse a una canasta de dos productos: pan y leche. El precio del pan es \$6 el Kg. y el precio de la leche es \$8 el litro. Plantear la restricción presupuestaria, graficarla e indicar cuántos Kg. de pan se pueden comprar si:

a) la canasta debe incluir 40 litros de leche
b) la canasta debe incluir 75 litros de leche
c) ese mes no se consume leche.

Ejercicio 3

Resolver la inecuación: $(x + 1).x^2.(x - 1)^3 \leq 0$.

Ejercicio 4

Resolver la inecuación: $(x^2 - 4).(9 - x^2) \geq 0$

Ejercicio 5

Resolver la inecuación: $\dfrac{x^2 - 3.x + 2}{x^2 - 2.x + 1} \geq 0$

Ejercicio 6

Resolver la inecuación: $\dfrac{x^2 - 2.x - 27}{x^2 + 2.x + 1} < 1$

Ejercicio 7

Resolver la inecuación: $e^x \geq x + 1$

8. ESPACIOS VECTORIALES

Definición: Sea V un conjunto de entes a los que llamaremos *vectores*. Se cumple:

a) Es posible definir la suma de dos elementos cualesquiera de V, el resultado de la suma también es un elemento de V y se verifica que $\{V, +\}$ es un grupo.

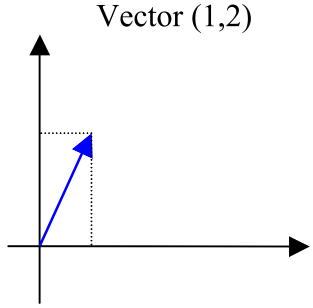
b) Es posible multiplicar los elementos de V por escalares[1] o números reales, el resultado de la multiplicación es un elemento de V, y el producto por un escalar verifica las siguientes propiedades:

* Existencia de neutro: el neutro es el real 1 y se cumple que $1.v = v, \ \forall v \in V$
* Asociativa: $(\lambda.\rho).v = \lambda.(\rho.v) \quad \forall \lambda,\rho \in R$ y $\forall v \in V$
* Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\lambda + \rho).v = \lambda.v + \rho.v$ $\forall \lambda,\rho \in R$ y $\forall v \in V$
* Distributiva respecto de la suma de vectores: $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda. v$ $\forall \lambda \in R$ y $\forall u,v \in V$

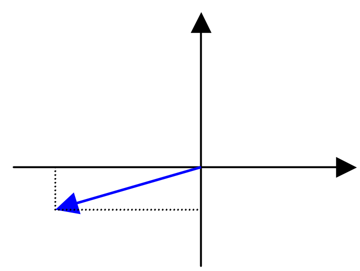
Entonces, $\{V, +, R, .\}$ tiene estructura de *espacio vectorial*.

Un ejemplo fácil de visualizar gráficamente es el caso en que V es el conjunto de las "flechas" del plano con origen en el origen de coordenadas. Las "flechas" o vectores se pueden identificar por su "punta", que no es otra cosa que un punto del plano o también un par ordenado de números reales.

Vector (1,2)



Vector (-3, -1)

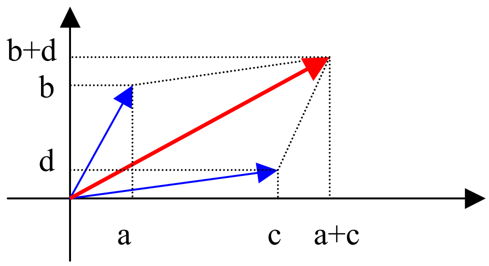


La suma de estos vectores se obtiene sumando sus coordenadas.

$$\begin{array}{c} u = (a, b) \\ v = (c, d) \\ \hline u + v = (a+c, b+d) \end{array}$$

y del punto de vista gráfico, la suma de dos vectores es otro vector que se obtiene como diagonal de un paralelogramo.

[1] Los escalares podrían ser también números complejos. Nosotros trabajaremos sólo con los reales.

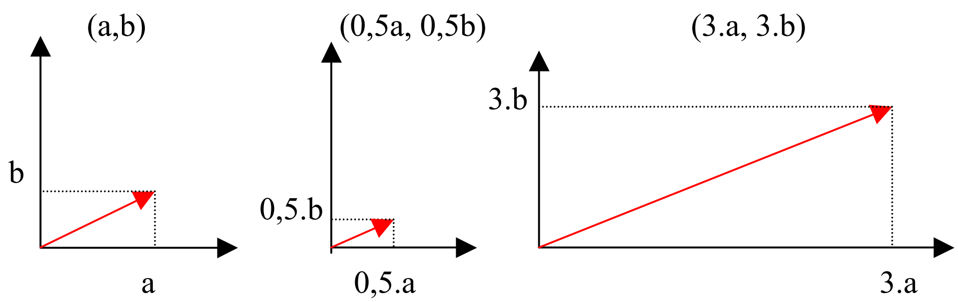


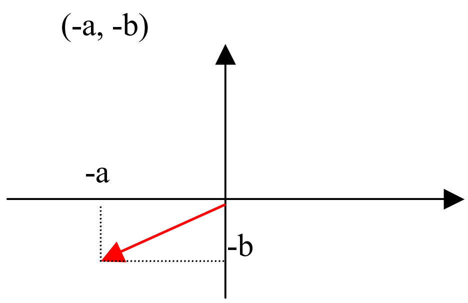
El producto de un vector por un número es otro vector que se obtiene multiplicando por ese número las coordenadas del primer vector.

$$\lambda.(a, b) = (\lambda.a, \lambda.b)$$

Gráficamente el producto de λ por (a, b) consiste en “estirar” la flecha en la misma dirección si $\lambda > 1$, “achicar” la flecha si $0 < \lambda < 1$ y cambiar la dirección de la flecha si $\lambda < 0$. Si $\lambda = 0$ entonces la flecha se transforma en el vector nulo:

$$0.(a, b) = (0, 0) = \varnothing = \text{Vector nulo}$$





El lector puede verificar que, el conjunto de las flechas, utilizando como escalares los números reales y con las definiciones que hemos dado de suma y producto por un escalar, es un Espacio Vectorial, es decir, se verifican las 8 propiedades que definen dicha estructura. A modo de ejemplo, el neutro de la suma en este espacio vectorial es el vector (0, 0), pues si se suma a cualquier otro vector, se obtiene éste último.

Por definición, (0, 0) es el neutro si para todo vector (a, b) es: (a, b) + (0,0) = (a, b)
Demostración: (a, b) + (0,0) = (a + 0, b + 0) = (a, b). Efectivamente, (0, 0) es neutro de la suma.

El opuesto del vector (a, b) es el vector (-a, -b), pues se cumple que la suma de ambos es el neutro de la suma.

Otro ejemplo de Espacio Vectorial es $\{\mathcal{P}_2, +, \mathcal{R}, .\}$ donde $\mathcal{P}_2$ es el conjunto de los polinomios (en una sola indeterminada) de coeficientes reales con grado menor o igual que 2, y las operaciones de suma y producto corresponden a las definiciones ya introducidas de suma de polinomios y multiplicación de un polinomio por un número. El resultado de las operaciones es siempre un polinomio de hasta grado 2 (un vector de $\mathcal{P}_2$) y es fácil verificar que se cumplen las 8 propiedades. El neutro de la suma en este Espacio Vectorial es el polinomio nulo.

Consideremos ahora el conjunto de los polinomios de grado 2 (sólo los de grado 2) $\mathcal{P}_2^*$. ¿Por qué $\{\mathcal{P}_2^*, +, \mathcal{R}, .\}$ no es un Espacio Vectorial?

Otros ejemplos de espacios vectoriales:

$\{\mathcal{P}_3, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Polinomios de hasta grado 3
$\{\mathcal{P}_n, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Polinomios de hasta grado n
$\{\mathcal{P}, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Polinomios
$\{\mathcal{R}^2, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Pares ordenados
$\{\mathcal{R}^3, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Ternas ordenadas
$\{\mathcal{R}^n, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Énuplas ordenadas
$\{\mathcal{M}_{2.2}, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Matrices 2 por 2
$\{\mathcal{M}_{m.n}, +, \mathcal{R}, .\}$: Vectores = Matrices m por n

El Espacio Vectorial con vectores de R^3 tiene como interpretación geométrica el espacio de tres dimensiones, donde los vectores son flechas con origen en el centro de coordenadas. En R^n los vectores también son flechas con origen en el centro de coordenadas, pero en un hiperespacio n-dimensional.

A partir de ahora supondremos que {V, +, R, .} es un Espacio Vectorial, y por abuso de lenguaje diremos que V es un Espacio Vectorial (donde las operaciones de suma y producto por un escalar son las definiciones usuales en los respectivos espacios).

<u>Definición</u>: Dados el conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k\}$, $U \subseteq V$, y el vector $v \in V$, se dice que v es *combinación lineal* de U si existen los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k \in R$ tales que el vector v se puede escribir así:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . u_i$$

Observaciones

1. Los λ_i se llaman los *coeficientes* de la combinación lineal.
2. Cuando todos los λ_i son iguales a 0, la combinación lineal se llama *trivial.*
3. Una combinación lineal de vectores es *no trivial* cuando uno por lo menos de los λ_i es distinto de 0.

Ejemplo: Sea $V = R^2$ y $U = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (2, 1)\}$. El vector $v_1 = (0, 3)$ es combinación lineal de U porque existen λ_1 y $\lambda_2 \in R$ tales que $\lambda_1.(1, 2) + \lambda_2.(2, 1) = (0, 3)$. Dichos λ_1 y λ_2 son: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$.

¿$v_2 = (5, -2)$ es combinación lineal de U? Para responder tenemos que averiguar si existen λ_1 y $\lambda_2 \in R$ tales que $\lambda_1.(1, 2) + \lambda_2.(2, 1) = (5, -2)$. Veamos si existen dichos escalares.

Partimos de la combinación lineal: $\lambda_1.(1, 2) + \lambda_2.(2, 1) = (5, -2)$

Por definición de producto por un escalar: $(\lambda_1, 2.\ \lambda_1) + (2.\ \lambda_2, \lambda_2) = (5, -2)$

Por definición de suma de vectores: $(\lambda_1 + 2.\ \lambda_2, 2.\ \lambda_1 + \lambda_2) = (5, -2)$

Para que ambos vectores sean iguales, deben ser iguales componente a componente. Es decir que las igualdades $\lambda_1 + 2.\ \lambda_2 = 5$ y $2.\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2$ deben satisfacerse a la vez. Entonces, v_2 es combinación lineal de U si el siguiente sistema de ecuaciones lineales es compatible:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2.\lambda_2 = 5 \\ 2.\lambda_1 + \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Y para ello, según hemos visto, alcanza con que la matriz de coeficientes del sistema, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sea de rango 2, lo cual se cumple en este caso pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Entonces, v_2 es combinación lineal de U.

Ejemplo: Sea $V = R^3$ y $U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1)\}$. ¿Es $v = (1, 2, 3)$ combinación lineal de U? Veamos si existen λ_1 y $\lambda_2 \in R$ que satisfacen la definición.

$$\lambda_1.(1, 1, 0) + \lambda_2.(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$$
$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) + (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = (1, 2, 3)$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \qquad \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

El sistema es incompatible (las dos primeras ecuaciones no tienen raíces en común) y por tanto v no es combinación lineal de U.

Observación: el vector nulo (∅) es combinación lineal de cualquier conjunto U no vacío. Si $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$, el vector nulo es C. L. de U si existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \in R$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.u_i = \varnothing$. Los λ_i existen: alcanza con tomar todos los $\lambda_i = 0$ (combinación lineal trivial). En el problema que nos planteamos a continuación, el asunto es otro: saber si además de la combinación lineal trivial, existe alguna combinación no trivial que origine el vector nulo.

<u>Definición</u>: Un conjunto de vectores U es *linealmente independiente* cuando la única forma de obtener el vector nulo como combinación lineal de U es mediante la combinación lineal trivial.

Ejemplo: Sea U = {u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1)}. ¿U es linealmente independiente (L. I.)? Para averiguarlo nos planteamos la combinación lineal de los vectores de U, la igualamos al vector nulo y estudiamos si la única forma de la combinación es la combinación lineal trivial o si existe una combinación no trivial de U que permita expresar el vector nulo.

$$\lambda_1.(1, 1, 0) + \lambda_2.(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) +(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1+ \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \qquad \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado con única raíz $\lambda_1 = 0$) y $\lambda_2 = 0$. Entonces, la única forma de obtener el vector nulo como combinación lineal de U es mediante la combinación lineal trivial. Entonces, el conjunto U es L. I.

Ejemplo: Sea T = {t_1 = (1, 1, 0), t_2 = (1, 1, 1), t_3 = (-1, -1, 2)}. ¿Es T un conjunto de vectores L. I.?

$$\lambda_1.(1, 1, 0) + \lambda_2.(1, 1, 1) + \lambda_3.(-1, -1, 2) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) +(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) +(-\lambda_3, -\lambda_3, 2.\lambda_3) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + 2.\lambda_3) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \qquad \lambda_2 + 2.\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La segunda y tercera ecuaciones son iguales, por lo que una de ellas puede eliminarse obteniendo un sistema equivalente con dos ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \qquad \lambda_2 + 2.\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado. Existen λ_1, λ_2 y λ_3 no todos nulos tales que $\lambda_1.t_1 + \lambda_2.t_2 + \lambda_3.t_3 = (0, 0, 0)$. Por ejemplo, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 1$. Entonces, el conjunto T no es L. I. Se dice que el conjunto T es *linealmente dependiente*.

<u>Definición</u>: Un conjunto U de vectores es *linealmente dependiente* (L.D.) cuando no es L. I.

Observaciones
1. Si el conjunto U está formado sólo por el vector nulo, U = { $\emptyset$ }, entonces U es L. D.
2. Si un conjunto U tiene como elemento el vector nulo, U = {$\emptyset$, u_2, u_3, ... }, entonces el conjunto U es L. D.

<u>Teorema</u>[1]: H) U tiene dos o más vectores
U es L. D.
T) Uno por lo menos de los vectores de U es combinación lineal de los restantes vectores de U.

<u>Teorema</u>[2]: Si a un conjunto L. D. se le agrega un vector cualquiera, entonces el nuevo conjunto también es L. D.

<u>Teorema</u>[3]: Si a un conjunto L. I. con dos o más vectores se le quita un vector cualquiera, entonces el nuevo conjunto también es L. I.

Observación: Si a un conjunto L. D. se le quita un vector, entonces no puede afirmarse nada de la dependencia lineal del nuevo conjunto. Otro tanto ocurre con un conjunto L. I. al cual se le agrega un vector.

<u>Definición</u>: El conjunto G de vectores es un *generador de V* si todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de G.

Ejemplo: Un vector cualquiera de R^3 es de la forma (a, b, c) donde las letras son parámetros independientes. Sea G = {u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)}. ¿Es G un generador de R^3?

$$(a, b, c) = a.(1, 0, 0) + b.(0, 1, 0) + c.(0, 0, 1) \ \forall \ a, b, c \in R$$

Entonces todo vector de R^3 puede escribirse como combinación lineal de G, y por tanto G es un generador de R^3.

Observación: Si a un generador se le agregan vectores, sigue siendo generador. Pero si a un generador se le quitan vectores, entonces no puede afirmarse nada acerca de si el nuevo conjunto sigue siendo generador.

<u>Definición</u>: El conjunto de vectores B es *base* del Espacio Vectorial V si se cumple a la vez que B es generador de V, y B es un conjunto L. I.

Ejemplo: El conjunto G = {u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)} es generador de R^3 y como además es L. I. (el lector habrá de probarlo), entonces G es base de R^3.

<u>Teorema</u>[4]: H) Existe una base en V con un número finito de vectores.
T) Todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.

<u>Definición</u>: Se llama *dimensión del Espacio Vectorial* al número de vectores de una base cualquiera del espacio.

Notación: Dim(V). Por ejemplo, $Dim(R^3) = 3$.

Observación: La dimensión del espacio puede ser finita, pero también existen espacios de dimensión infinita. Nosotros estaremos interesados en los espacios de dimensión finita.

<u>Teorema</u>[5]: H) Dim(V) = n
T) Todo conjunto de V con más de n vectores es L. D.

Ejemplo: Consideremos el Espacio Vectorial R^3. Ya sabemos que $Dim(R^3) = 3$. En consecuencia, todos los conjuntos de R^3 con más de 3 vectores son L. D. Sabemos que en R^3 las bases tienen 3 vectores. Entonces, ¿puede haber conjuntos L. I. con dos o menos vectores? La respuesta es afirmativa. Dichos conjuntos L. I. con 2 o menos vectores, ¿pueden ser generadores de R^3? La respuesta es NO, pues si hubiera generadores L. I. con dos vectores, entonces serían bases del E. Vectorial, y la dimensión no sería 3.

Es fácil demostrar que en el Espacio Vectorial de los polinomios $\mathcal{P}_2$, la dimensión es 3, que en el Espacio Vectorial $\mathcal{P}_n$ la dimensión del espacio es (n + 1) y que en el Espacio R^n la dimensión es n.

El último concepto que introducimos en esta sección es el de *subespacio*.

<u>Definición</u>: Sea el conjunto de vectores V' incluido en el Espacio Vectorial V, $V' \subseteq V$, tal que {V', +, R, .} es también un Espacio Vectorial. Entonces V' es un *subespacio vectorial* de V.

Ejemplo: Sea $V = R^2$ y sea $V' = \{(a, b): a = b\}$, es decir, V' es el conjunto de vectores de R^2 que tienen iguales sus coordenadas. Probaremos que V' es un subespacio vectorial de R^2. Como los vectores de V' son también vectores de V, y las operaciones de suma y multiplicación por un escalar son las mismas, todas las propiedades del espacio vectorial V se cumplen en V' a condición que las operaciones sean *cerradas*, esto es, que la suma de vectores de V' sea un vector de V' y que la multiplicación de un vector de V' por un escalar cualquiera también sea un vector de V'.

Dos vectores cualesquiera de V' tienen la forma: (α, α) y (β, β). La suma de estos dos vectores es $(\alpha + \beta, \alpha + \beta)$ que también es un vector de V' (pues tiene iguales sus coordenadas). El producto de un vector por un escalar tiene la forma: $\lambda.(\alpha, \alpha) = (\lambda.\alpha, \lambda.\alpha)$ que también tiene sus coordenadas iguales. Entonces, V' es un subespacio vectorial de R^2.

<u>Teorema</u>[6]: H) V' es un subespacio vectorial de V
T) $Dim(V') \leq Dim(V)$

Ejemplo: Demostrar que en el ejemplo precedente es $Dim(V') = 1$.

<u>Teorema</u>[7]: H) U es un conjunto de vectores finito en el espacio vectorial V

W = {w: w es combinación lineal de U}
T) {W, +, R, .} es un subespacio vectorial de V

El conjunto W es el conjunto de todas las combinaciones posibles del conjunto U. Lo que afirma el teorema es que este conjunto es un subespacio vectorial de V. ¿Qué pasa si el conjunto U es una base de V? Lo que ocurre es que el conjunto W coincide con V, pues el conjunto U por ser base es también generador, entonces los vectores de W son todos los que pueden escribirse como combinación lineal de un generador, o sea, todo el Espacio Vectorial V. El subespacio vectorial W se conoce como el *subespacio vectorial generado por U.*

Ejemplo: Sean $V = R^3$ y $U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, -1, 0)\}$. El subespacio vectorial generado por U es $W = \{w: w = a.(1, 1, 0) + b.(1, -1, 0)\}$. W es un conjunto de vectores de la forma (a + b, a – b, 0) donde a y b son parámetros independientes. Es fácil probar que Dim(W) = 2 pues el conjunto U es generador de W y además es L. I.

Repartido Práctico 8: Espacios Vectoriales

Ejercicio 1

Verificar que el conjunto de las matrices 2x2 con las operaciones de suma de matrices y producto por un escalar (real) es un Espacio Vectorial.

Ejercicio 2

Sea el conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y sea un vector v tal que:
$4.u_3 + 2.v = u_1 + 2.u_2 - 6.u_4$.

Hallar los coeficientes λ_i que permiten expresar al vector v como combinación lineal de U.

Ejercicio 3

Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Hallar 5 vectores que sean combinaciones lineales de U.

b) ¿El vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de U?

c) ¿El vector nulo es combinación lineal de U?

d) ¿Existe algún vector de R^3, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ que no sea combinación lineal de U?

Ejercicio 4

Sea $U=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. ¿Es posible escribir el vector nulo como combinación lineal no trivial de U?

Ejercicio 5

Sea $U=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

a) Probar que U es LI.
b) ¿Qué ocurre con la dependencia lineal del conjunto U si se le quita uno cualquiera de los tres vectores?

Ejercicio 6

Probar que U = {O} es LD.

Repartido Práctico 8: Espacios Vectoriales

Ejercicio 7

Sea $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Se sabe que $u_2 = 4.u_1 - 3.u_3 + 5.u_4$. ¿Qué puede decirse de la dependencia lineal del conjunto U?

Ejercicio 8

Sea el conjunto $U = \{(1,1,0) \quad (-1,2,0) \quad (2,-1,0)\}$.

a) Escribir el tercer vector de U como combinación lineal de los dos restantes.
b) El conjunto U ¿es LI?
c) Considere el conjunto de vectores $W = \{(a,b,c) \quad \textit{tales que} \quad c=0\}$. Los vectores de W ¿pueden escribirse como combinación lineal de los vectores de U?
d) ¿W es un espacio vectorial?
e) ¿U es un generador de W?
f) ¿U es una base de W?
g) ¿Cómo puede obtenerse una base de W a partir del conjunto U?

Ejercicio 9

Sea $U=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

a) Probar que el primer vector de U puede escribirse como combinación lineal de los tres restantes.
b) Estudiar la dependencia lineal del conjunto formado por U excluyendo el primer vector.
c) Probar que dicho conjunto es un generador de R^3.
d) ¿Qué dimensión tiene el espacio vectorial R^3?
e) El conjunto definido en b) ¿es una base de R^3?

Ejercicio 10

Considere los espacios vectoriales V_1 = Polinomios de hasta grado 2, y V_2 = Matrices dos por dos.

a) Hallar un generador de V_1.
b) Hallar un generador de V_2.
c) Hallar una base y la dimensión de V_1.
d) Hallar una base y la dimensión de V_2.

Ejercicio 11

a) Probar que $V' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a+b+c=0 \right\}$ es un SEV de R^3.
b) Hallar una base de V’ y calcular la Dim(V’).
c) ¿Cuántos vectores, por lo menos, tiene que tener un generador de V’?
d) ¿Cuántos vectores tienen todas las bases de V’?

Repartido Práctico 8: Espacios Vectoriales

Ejercicio 12

Sea $V = R^2$ y sea W el subespacio generado por $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Hallar una base de W.
b) Hallar Dim(W).

Ejercicio 13

Considere el espacio de las matrices 2x2: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\}$ y el subconjunto P tal que $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} con\ b+c=0 \right\}$.

a) Probar que P un subespacio de M.
b) Sea el conjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. Estudiar si el conjunto A es un generador de P.

c) Hallar una base de P y calcular Dim (P).

Ejercicio 14

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Cuando la afirmación es falsa, mostrarlo con un ejemplo.

Sea el conjunto U con k vectores, k K 0, en el espacio vectorial V.	V	F
1. Si U es LD y al quitarle un vector se vuelve LI, entonces el nuevo conjunto es base de V		
2. Si U es LD y se le agrega un vector, entonces sigue siendo LD.		
3. Si U es LD y Dim(V) = k-1, entonces al quitar a U un vector, el nuevo conjunto es base de V.		
4.Si U es LD y se le quitan sucesivos vectores combinaciones lineales de los restantes, entonces finalmente se llega a un conjunto LI.		
5. Si U es LD y se le agregan sucesivos vectores, nunca se alcanzará a tener una base de V.		
6. Si U es LD, entonces Dim(V) < k.		
7. Si U es LD, entonces Dim(V) K k.		
8. Si U es LD, entonces todo conjunto de V con más de k vectores es LD.		
9. Si U es LD, entonces ningún conjunto con menos de k vectores puede ser generador de V.		
10. Si U es LI, entonces todo conjunto de V con menos de k vectores es LI.		
11. Si U es LI, entonces todo subconjunto de U es LI.		
12. Si U es LI y Dim(V) = k, entonces todo conjunto con más de k vectores es LD		
13. Si U es LI, entonces existen en V otros conjuntos LI con k vectores.		
14. Si U es LI, entonces U no es LD.		
15. Si U es LI y Dim(V) = k, entonces U es base de V.		
16. Si U es LI y existe un conjunto generador de V con k vectores, entonces U es base de V		
17. Si U es LI y no existen en V generadores con menos de k vectores, entonces U es base.		
18. Si U es generador de V y Dim(V) = k, entonces U es base de V.		

Ejercicio 15

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Cuando la afirmación es falsa, mostrarlo con un ejemplo.

Sea U un conjunto del espacio vectorial V (U puede ser infinito o finito).	V	F
1. Si U es generador de V, entonces U tiene un número finito de vectores.		
2. Si U es LI y generador, entonces tiene un número finito de vectores.		
3. Si U es generador de V, entonces U tiene por lo menos dos vectores.		
4. Todos los generadores de V tienen el mismo número de vectores.		
5. Todo espacio vectorial V admite una base finita.		
6. Si U con k vectores es generador de V y W con k-2 vectores es LI, entonces Dim(V)=k-1.		
7. Si U con k vectores es generador de V y W con k-2 vectores es LI, $\Rightarrow$ k-2 $\leq$ Dim(V) $\leq$ k.		
8. Si U es LD, entonces todo conjunto de V con más de k vectores es LD.		
9. Si U es LD, entonces ningún conjunto con menos de k vectores puede ser generador de V.		
10. Si U es LI, entonces todo conjunto de V con menos de k vectores es LI.		

Ejercicio 16

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Cuando la afirmación es falsa, mostrarlo con un ejemplo.

Sea S un subespacio vectorial del espacio vectorial V.	V	F
1. Entonces Dim(S) < Dim(V).		
2. Entonces existe S tal que Dim(S) = 0.		
3. Si $v \in S \Rightarrow v \in V, \forall v \in S$.		
4. Si $u \in S$ y $v \in S \Rightarrow (u + \lambda.v) \in S, \forall \lambda \in R$.		
5. Si ϕ es neutro de la suma en V, entonces $\phi \in S$.		
6. El subespacio vectorial S puede tener dos o más vectores neutros de la suma en S.		
7. Si Dim(S) < Dim(V), entonces existe por lo menos un vector $v \in V$ tal que $v \notin S$.		

9. VALORES Y VECTORES PROPIOS. DIAGONALIZACIÓN.

Polinomio característico

Consideremos una matriz *n*-cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz (A - $\lambda.I_n$), donde I_n es la matriz identidad *n*-cuadrada y λ un escalar indeterminado, se denomina *matriz característica* de *A a la matriz*:

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante, det (A - $\lambda \cdot I_n$) , que es un polinomio en λ, recibe el nombre de *polinomio característico* de *A*.

La expresión det (A - $\lambda \cdot I_n$) = 0 se llama *ecuación característica de A.*

Ejemplo: Hallar la matriz característica y el polinomio característico de la matriz *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz característica es (A - $\lambda.I_n$). Luego:

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda In) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(0-\lambda)+4 = \lambda^2 - \lambda + 4.$$

Así pues, el polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda + 4$.

Valores propios y vectores propios

Sea A una matriz n-cuadrada y sea X un vector columna de n componentes tal que:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \mathrm{O}$$

Defినción: Se llaman *valores propios (ó característicos)* de la matriz A todos los escalares λ que verifican la ecuación $\boldsymbol{A}x\mathbf{X} = \lambda.\mathbf{X}$, o la ecuación equivalente: $(\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I})x\mathbf{X} = \varnothing$.

Ejemplo: Hallar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Como la matriz es 3x3, el vector X tiene tres componentes. Para hallar los valores propios se plantea la ecuación característica.

$$AxX = \lambda xX \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el vector X no puede ser el vector nulo, y el sistema lineal es homogéneo, es necesario que el sistema tenga otras raíces. Para ello, el sistema debe ser indeterminado. Entonces, alguna punta de escalón debe ser diferente de cero. Los valores propios son, entonces, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. De otra forma, el polinomio característico es $(1 - \lambda)^2.(2 - \lambda)$ y la ecuación característica tiene las raíces 1 y 2.

Los λ que resuelven la ecuación característica pueden ser números reales o complejos

Definición: Sea λ_0 un valor propio real de A. Se llama *vector propio* de la matriz A asociado a λ_0 a cualquier vector $X \neq 0$ tal que $\boldsymbol{A} \times \mathbf{X} = \lambda_0 . \mathbf{X}$.

Los términos *valor característico* y *vector característico* (o *autovalor* y *autovector*) se utilizan con frecuencia en lugar de valor propio y vector propio.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, y sean $v_1 = (2,3)$ y $v_2 = (1,-1)$. Entonces

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4v_1.$$

y

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1v_2$$

Así pues, v_1 y v_2 son vectores propios de A asociados, respectivamente, a los valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ de A. En este ejemplo hemos visto que los vectores v_1 y v_2 verifican la definición de vector propio, pero no hemos resuelto el problema de encontrar los vectores propios asociados a una matriz.

Los valores y vectores propios cumplen las siguientes propiedades:

1. *λ es un valor propio de A si y solo si $|A - \lambda.I| = 0$.*

2. *Si X es un vector propio de A, entonces el vector k.X (k es un escalar no nulo) también es un vector propio de A.*

3. *Si A es una matriz simétrica, entonces todos los valores propios de A son reales.*

4. *Si A es simétrica, entonces los vectores propios correspondientes a diferentes valores propios tienen su producto escalar nulo.*

5. *Sea A una matriz cuadrada y Q otra matriz cuadrada invertible. La matriz $B = Q^{-1}.A.Q$ tiene los mismos valores propios de la matriz A.*

Demostración: El polinomio característico de la matriz B es $|B - \lambda.I|$ = $|Q^{-1}.A.Q-\lambda.I|$*. Pero la matriz identidad I es igual al producto* $Q^{-1}.I.Q$ *y por tanto:* $|B - \lambda.I| = |Q^{-1}.A.Q-\lambda.Q^{-1}.I.Q| = |Q^{-1}.(A-\lambda.I).Q| = |Q^{-1}|.|A-\lambda.I|.|Q| = |A-\lambda.I|$.

Ejemplo: Nos planteamos ahora el problema de encontrar los vectores propios de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ya vimos que los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

- Cuando es $\lambda_1 = 1$, los vectores propios asociados se obtienen de la ecuación Ax$X = \lambda_1.X$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

que conduce al sistema:

$$\begin{cases} 2.x_2 + x_3 = 0 \\ 3.x_3 = 0 \\ 2.x_3 = 0 \end{cases}$$

cuyas raíces son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Cuando es $\lambda_2 = 2$, los vectores propios asociados se obtienen de la ecuación $\boldsymbol{A}$x$\mathbf{X} = \lambda_2.\mathbf{X}$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

que conduce al sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2.x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 3.x_3 = 0 \\ 0.x_3 = 0 \end{cases}$$

cuyas raíces son de la forma $\begin{pmatrix} 7.x_3 \\ 3.x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Como puede observarse en el ejemplo, en virtud de la propiedad 2 antes enunciada, para cada valor propio existen infinitos vectores propios, los cuales difieren entre sí solamente por una constante multiplicativa. En el ejemplo, para $\lambda_1 = 1$ un vector propio asociado es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se puede obtener otro cualquiera (asociado al mismo valor propio) multiplicando dicho vector por un número real cualquiera (distinto de cero). Lo mismo ocurre en el caso de $\lambda_2 = 2$: cualquier vector propio asociado a dicho valor propio tiene la forma: $\begin{pmatrix} 7.x_3 \\ 3.x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3.\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observación

En el ejemplo anterior, si todos los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 2$ se pueden escribir como producto de un número (distinto de cero) por el vector $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces el conjunto de vectores propios asociados a $\lambda_2 = 2$ con el agregado del vector nulo, llamémosle V_2, es un subespacio de R^3, donde el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base del mismo (pues es a la vez LI y generador de V_2.

<u>Teorema</u>[1]: H) A es simétrica

λ_i son valores propios de A, todos diferentes.

v_i es un vector propio de A asociado al valor propio λ_i

$$Q = \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ v_n \\ \\ \end{pmatrix} \right)$$

T) $Q^{-1}.A.Q$ es una matriz diagonal

<u>Definición</u>: Se dice que un vector u está *normalizado*[2] si se cumple que el producto escalar del vector por sí mismo es igual a la unidad.

u está normalizado si: u (x) u = 1

Observaciones

1. En un espacio normado, el vector nulo es el único que no se puede normalizar.

---

[2] No en todos los espacios vectoriales es posible definir la norma de un vector. Los que tienen esta propiedad se denominan espacios normados. R, R^2, R^3 y en general R^n son espacios normados.

2. Para normalizar un vector diferente del vector nulo alcanza con transformarlo así: $\dfrac{u}{\sqrt{u(x)u}}$.

Ejemplo: Sea u = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow u(x)u = 1x1 + 2x2 + 3x3 = 14 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$ es un vector normalizado.

Teorema[2]: H) A es una matriz simétrica n.n con n valores propios distintos
Q es una matriz que tiene en las columnas vectores propios normalizados correspondientes a distintos valores propios de la matriz A
T) Q es una matriz ortogonal (es decir, $Q^T = Q^{-1}$).

Ejemplo: Sea la matriz simétrica A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. El lector demostrará que la matriz tiene tres valores propios diferentes, 1, 2 y 3, y vectores propios asociados a dichos valores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Al normalizarlos se obtienen los vectores: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Entonces de acuerdo al Teorema[1], la matriz Q = $\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *diagonaliza* a la matriz A, pues $Q^{-1}.A.Q$ es una matriz diagonal. De acuerdo con el Teorema[2] la matriz Q es ortogonal, por tanto, $Q^{-1} = Q^T$. Para comprobarlo alcanza con realizar el producto $Q^{-1}.A.Q$. Al realizar las operaciones se encuentra que:

$$Q^{-1}.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Es una casualidad que la matriz $Q^{-1}.A.Q$ tenga en su diagonal los valores propios de A?

Teorema[3]: H) A es una matriz simétrica n.n

λ_i son valores propios de A, todos diferentes

v_i son vectores propios de A normalizados

$$Q = \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ v_n \\ \\ \end{pmatrix} \right)$$

T) $Q^{-1}.A.Q$ tiene en su diagonal principal a todos los λ_i.

Entonces, el resultado que obtuvimos en el ejemplo de la página anterior no era una casualidad.

Definición: Dos matrices $A_{n.n}$ y $B_{n.n}$ se dicen *semejantes* si existe una tercera matriz Q tal que: $B = Q^{-1}.A.Q$.

Observación: Si A es una matriz simétrica, ¿cómo se puede obtener una matriz B semejante a A y diagonal? De acuerdo con el último teorema, alcanza con encontrar los valores propios de A. Una matriz B diagonal que tenga en la diagonal principal los valores propios de A es semejante a A.

Ejemplo: la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, según ya hemos visto, tiene los valores propios 1, 2 y 3. En consecuencia, la matriz diagonal $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es semejante a A.

Formas cuadráticas

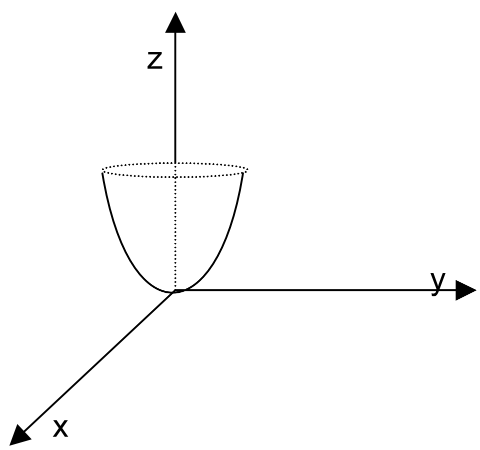
Definición: Sea $A_{n.n}$ una matriz simétrica y sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vector de n indeterminadas. La expresión $X^T.A.X$ es una *forma cuadrática en las indeterminadas* $x_1, x_2, \dots, x_n$. A se llama *la matriz* de la forma cuadrática.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces, $X^T.A.X = x^2 + 2.x.y + 2.y^2$.

Observaciones

1. La forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado 2 en las indeterminadas $x_1, x_2, \dots, x_n$.
2. A partir de la forma cuadrática puede definirse una función de varias variables, cuya representación gráfica no es fácil de visualizar.

Ejemplo 1: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces, $X^T.A.X = x^2 + y^2$. Sea z = f(x, y) = $x^2 + y^2$. ¿Cómo es el gráfico de esta función? Sean x, y, z las coordenadas en el espacio de tres dimensiones. Cuando nos posicionamos en el plano xy es z = 0. Pero si z = 0, entonces $x^2 + y^2 = 0$ y esta ecuación se satisface sólo si x = y = 0. Entonces la función f(x, y) corta al plano xy sólo en el centro de coordenadas. En el semiespacio donde z < 0 no hay gráfico, pues no existen valores (x, y) para los cuales $x^2 + y^2 < 0$. Si z > 0, entonces la ecuación $x^2 + y^2 = z$ representa para cada z una circunferencia de radio $\sqrt{z}$ que va aumentando de diámetro a medida que aumenta el valor de z. La intersección del gráfico con el plano xz (y = 0) tiene la forma $z = x^2$, que es una parábola, y otro tanto ocurre al intersectar el gráfico con el plano yz, resultando una parábola de la forma $z = y^2$. El gráfico se denomina *paraboloide.*



Ejemplo 2: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces, $X^T.A.X = f(x, y) = x^2 - y^2$. ¿En qué puntos gráfico de la función corta al plano xy? $z = 0 = x^2 - y^2 = (x – y).(x + y)$. Esta condición equivale a las condiciones (x = y) ó (x = -y). Entonces el gráfico corta al plano xy en dos rectas, que son las bisectrices de los cuadrantes del plano. Es difícil visualizar qué ocurre con el gráfico cuando z < 0 o cuando z > 0.

Ejemplo 3: Sea la forma cuadrática $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. El gráfico es un paraboloide en un espacio de n+1 dimensiones. ¿Alguien lo puede imaginar?

Observaciones

1. Cuando $X_{n.1}$ y $A_{n.n}$, la forma cuadrática $X^T.A.X$ tiene dimensiones 1.1 y su expresión general es:

$$X^T.A.X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2 + 2.\sum_{i<j} a_{ij}.x_i.x_j$$

2. Cuando la forma cuadrática admite la expresión $X^T.A.X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2$ (intervienen sólo los cuadrados de las indeterminadas) la forma cuadrática se llama *canónica.*
3. ¿Existe algún procedimiento para pasar de la forma general a una forma cuadrática canónica de tal forma que la nueva matriz de la forma tenga los mismos valores propios de la matriz original? La respuesta es afirmativa, y el procedimiento para lograrlo es una *transformación lineal*.

Ejemplo: Sea la forma cuadrática f(x, y) = $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2.x^2 + 2.x.y + 2.y^2$

Si se hace la transformación lineal $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.(-x+y) \end{cases}$ se obtiene la nueva forma $f(x', y') = 3.x'^2 + y'^2$, que tiene la forma canónica.

Observaciones

1. En el ejemplo precedente se observa que la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz de la nueva forma $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios.
2. En una forma cuadrática canónica, la matriz de la forma es una matriz diagonal.
3. *Diagonalizar una forma cuadrática* consiste en obtener una nueva forma cuya matriz sea a la vez diagonal y semejante a la matriz de la forma original.

Teorema[1]: H) Sea $X^T.A.X$ una forma cuadrática

Sea X = Q.Y transformación del vector X donde Q es la matriz de vectores propios de A normalizados

T) $(Q.Y)^T.A.(Q.Y)$ es una forma cuadrática canónica en el vector Y

$(Q.Y)^T.A.(Q.Y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.y_i^2$ donde los λ_i son los valores propios de la matriz A.

La demostración del Teorema se basa en las propiedades ya vistas sobre valores y vectores propios. $(Q.Y)^T.A.(Q.Y) = Y^T.(Q^T.A.Q).Y$ y ya sabemos que la matriz $Q^T.A.Q$ es diagonal, semejante a A y tiene en la diagonal principal a los valores propios de la matriz A.

En consecuencia, la transformación lineal $X = Q.Y$, o lo que es lo mismo, $Y = Q^{-1}.X$, permite pasar de una forma cuadrática general a una forma canónica, de manera que las matrices de ambas formas (A y $Q^T.A.Q$) sean semejantes.

Definición:

(A) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama DEFINIDA POSITIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) > 0$.

(B) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama SEMIDEFINIDA POSITIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) \geq 0$.

(C) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama DEFINIDA NEGATIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) < 0$.

(D) Una forma cuadrática $f(x_1, x_2,...,x_n)$ se llama SEMIDEFINIDA NEGATIVA si para todo vector $X = (x_1, x_2,...,x_n) \neq \varnothing$ es $f(x_1, x_2,...,x_n) \leq 0$.

(E) Una forma cuadrática se llama INDEFINIDA si no es de ninguna de las formas anteriores.

Teorema[2]: H) Sea una forma cuadrática $X^T.A.X$

T_1) La forma cuadrática es *definida positiva* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i > 0$.

T_2) La forma cuadrática es *semidefinida positiva* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i \geq 0$.

T_3) La forma cuadrática es *definida negativa* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i < 0$.

T_4) La forma cuadrática es *semidefinida negativa* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con todos los $b_i \leq 0$.

T_5) La forma cuadrática es *indefinida* si mediante una trasformación apropiada se puede llevar a la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} b_i.y_i^2$ con algún $b_i > 0$ y algún $b_i < 0$.

Proyección de población (aplicación de cadenas de Markov)

Supongamos que la población de un país se puede clasificar en tres categorías según la localidad donde residen:

- mega ciudades
- localidades urbanas medianas y pequeñas
- área rural.

En el país se realizan censos de población cada 5 años. En los censos, entre otras variables, se pregunta a las personas por el lugar donde residían 5 años antes. Al analizar varios censos consecutivos se observa un comportamiento estable con las siguientes características:

i) Los movimientos de migración internacional no tienen significación en la distribución poblacional por categoría de la localidad.

ii) Si una persona residía hace 5 años en una mega ciudad, tiene actualmente las siguientes probabilidades:
* 70% de seguir residiendo en una mega ciudad
* 20% de pasar a residir en otra localidad urbana
* 10% de pasar a residir en el área rural.

iii) Si una persona residía hace 5 años en una localidad urbana mediana o pequeña, entonces actualmente tiene:
* 20% de probabilidad de pasar a residir en una mega ciudad
* 60% de permanecer en una localidad urbana mediana o pequeña
* 20% de pasar a residir en el área rural.

iv) Si una persona residía hace 5 años en el área rural, entonces actualmente tiene:
* 10% de probabilidad de pasar a residir en una mega ciudad
* 20% de pasar a residir en otra localidad urbana
* 70% de permanecer en el área rural.

Con estas probabilidades es posible construir una *matriz de transición* (T).

		RESIDENCIA ACTUAL		
		Mega ciudad	Otra urbana	Área rural
RESIDENCIA HACE 5 AÑOS	Mega ciudad	0,7	0,2	0,1
	Otra urbana	0,2	0,6	0,2
	Área rural	0,1	0,2	0,7

Actualmente, la población se distribuye por categoría de localidad de acuerdo con el siguiente vector (X_0):

Mega ciudad	Otra urbana	Área rural
0,40	0,45	0,15

Si se espera que la matriz de transición permanezca estable y que el crecimiento natural de la población sea similar en las tres categorías de localidades, ¿cuál será la distribución de la población dentro de 100 años?

Se demuestra que el vector que estamos buscando, $X_{20} = (x_1, x_2, x_3)$ tiene la propiedad siguiente:

$$X_{20} = X_0 * T^{20}$$

El problema a resolver, bastante pesado, es el cálculo de T^{20}. Una forma de resolverlo es hacer $[(T^5)^2]^2$ lo que no deja de ser complicado en virtud que los elementos de T son números decimales. Otra forma de resolverlo consiste en diagonalizar la matriz T.

Sea Q la matriz que diagonaliza T. Entonces: $B = Q^T * T * Q$, es una matriz diagonal que tiene en la diagonal principal los valores propios de T si Q tiene en cada columna un vector propio de T normalizado y asociado a cada valor propio. Como se sabe, Q es una matriz ortogonal, esto es: $Q^T = Q^{-1}$. Entonces:

$$B^{20} = (Q^T*T*Q)^{20} = (Q^{-1}*T*Q)^{20} = (Q^{-1}*T*Q)*(Q^{-1}*T*Q)*(Q^{-1}*T*Q)*\ldots..*(Q^{-1}*T*Q)$$

y aplicando la propiedad asociativo del producto de matrices resulta:

$$B^{20} = (Q^{-1}*T)*(Q*Q^{-1})*T*(Q*Q^{-1})*T*\ldots..(Q*Q^{-1})*(T*Q)$$

y como $Q*Q^{-1} = I$, se deduce $B^{20} = Q^{-1}*T^{20}*Q$ y, por tanto: $T^{20} = Q*B^{20}*Q^{-1}$.

Es fácil demostrar que si $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$; *entonces* $B^{20} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{20} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{20} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{20} \end{pmatrix}$.

Resulta entonces que, para hallar T^{20}, alcanza con encontrar los valores propios de T, λ_1, λ_2, λ_3, (y ello resuelve el problema B^{20}) y los vectores propios normalizados asociados (y ello permite encontrar la matriz Q) y finalmente multiplicar $Q*B^{20}*Q^T$.

En nuestro ejemplo es $T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ que es una matriz simétrica. Por tanto, todos sus valores propios son números reales. La ecuación característica es $(\lambda - 0{,}6)*(\lambda^2 - 1{,}4*\lambda + 0{,}4)$ que tiene por raíces: 1; 0,6 y 0,4. Para cada uno de ellos se calcula un vector propio normalizado y resultan:

- Para λ = 1, el vector propio $\frac{1}{\sqrt{3}} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Para λ = 0,6, el vector propio $\frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Para λ = 0,4, el vector propio $\frac{1}{\sqrt{6}} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, T^{20} =

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0,4^{20} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,333352 & 0,333333 & 0,333315 \\ 0,333333 & 0,333333 & 0,333333 \\ 0,333315 & 0,333333 & 0,333352 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el vector de la distribución de la población 100 años después resulta igual a:

$$(0,40 \quad 0,45 \quad 0,15) * \begin{pmatrix} 0,333352 & 0,333333 & 0,333315 \\ 0,333333 & 0,333333 & 0,333333 \\ 0,333315 & 0,333333 & 0,333352 \end{pmatrix} = (0,333338,\ 0,333333,\ 0,333329)$$

Este resultado sugiere que la población en el largo plazo tiende a repartirse en partes iguales en las tres categorías de localidades, si se mantienen los supuestos y en particular la estabilidad de la matriz de transición. Se demuestra que el vector X de la distribución en el largo plazo (cuando el número de censos se hace tan grande como se quiera) se obtiene resolviendo la ecuación: X*T = X. Esta ecuación vectorial conduce al siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & T^T - I & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como en nuestro caso T es simétrica, $T^T - I = T - I$. La resolución del sistema conduce a la raíz: (1/3, 1/3, 1/3), tal como podía intuirse. Obsérvese que este resultado es independiente de la situación de partida (X_0), sólo depende de la forma de la matriz de transición.

Repartido Práctico 9: Valores y vectores propios. Diagonalización. Formas cuadráticas.

Ejercicio 1

Se recuerda que una matriz A es ortogonal si $A^T = A^{-1}$. Se pide:

a) Demostrar que si A es ortogonal, entonces A^{-1} también lo es.
b) Demostrar que el producto de una matriz ortogonal por su traspuesta es conmutativo.
c) Demostrar que si A y B son matrices ortogonales, entonces el producto A.B es también una matriz ortogonal.
d) Demostrar que si la matriz A es ortogonal, entonces: $|A| = \pm 1$.

Ejercicio 2

Normalizar los siguientes vectores: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3

a) ¿La matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal?
b) Normalizar los vectores columna de Q.

Ejercicio 4

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar sus valores propios.
b) Hallar sus vectores propios normalizados.
c) Hallar una matriz Q tal que $Q^{-1}.A.Q$ sea diagonal.

Ejercicio 5

En los casos que siguen, explicitar la matriz de la forma cuadrática.

a) $4.x^2 + 9.y^2$
b) $x^2 + y^2 + z^2$
c) $2.x^2 + 4.x.y - y^2$

Ejercicio 6

Sea la forma cuadrática $(x_1 \quad x_2).\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a) Escribirla como un polinomio homogéneo de segundo grado.

b) Escribirla de la forma: $\lambda_1.y_1^2 + \lambda_2.y_2^2$, hallando λ_1 y λ_2.

Repartido Práctico 9: Valores y vectores propios. Diagonalización. Formas cuadráticas.

Ejercicio 7

Clasificar las siguientes formas cuadráticas correspondientes al vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) $x_1^2 + 2.x_2^2 + 3.x_3^2$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $-x_1^2 + -5.x_2^2 - 7.x_3^2$

d) $-x_1^2 - x_3^2$

e) $(x_1 + x_2 + x_3)^2$

f) $x_1^2 + (x_2 - x_3)^2$

g) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

Ejercicio 8

Clasificar las siguientes formas cuadráticas correspondientes al vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

utilizando el Teorema[2].

a) $x_1^2 - 2.x_1.x_2 + 3.x_2^2 - 4.x_2.x_3 + 5.x_3^2$

b) $-3.x_1^2 - 8.x_1.x_2 + 3.x_2^2$

c) $5.x_1^2 - 8.x_1.x_2 + 5.x_2^2$